

非理科系学生のための音響信号処理

Sound signal processing for students for not majoring science

林 伸二
HAYASHI Shinji

[抄録]

高等学校で理科系教育を受けてこなかった学生が音響クリエイターなど、音響・音楽関連のキャリアを志向するとき、音響信号処理の知識が必要となることに対応して、物理数学の高度の素養を要しない音響信号処理の授業の進め方を研究してきた。アナログ系とデジタル系での信号の扱いの違い、デジタルフィルタの特徴、サンプリングの意味を直観的にイメージできることを念頭に、デルタ関数、遅延信号の重ね合わせを説明する。これをもとに、Z変換を理解し、伝達関数の特性をスプレッドシートの利用を含む演習により体得する過程を易しい解釈により示す。

キーワード：

音響信号処理、フィルター、サンプリング、デルタ関数、Z変換

[Abstract]

This paper presents a study on how to give lectures of Sound Signal Processing to students who have not sufficient background in physics or mathematics. The lecture is prepared paying little attention to mathematical preciseness. On the contrary, for students to be artistic creators who use the signal processing tools, presented are basis of the sampling with delta-function, Fourier-Transformation, Z-Transformation, and convolution process of filtering. Firstly, a plain review of the sampling with delta-function and its time shift is presented. Secondly, special attention for the Z-transformation and filtering is paid using examples of practical works with spread-sheet software tools.

Keywords:

Sound Signal Processing, Filter, Sampling, Delta-function, Z-Transformation

1. はじめに

前編「非理科系学生のための音響学」では、高等学校で理科系教育を受けてこなかった学生が音響クリエータなど、音響・音楽関連のキャリアを志向するとき必須となる音響学の理解を助けるための授業知見を記した。ここでは、音響振動の基礎、正弦波、複素数、フーリエ解析について、理論式を厳密に追って理解を求めるのではなく、現象、動作をイメージすることができるような授業の構成、式の解釈について述べた。本版は、その中でも音響信号のデジタル処理に特化しての授業法研究について述べたい。

DAW (Digital Audio Workstation)、DTM (Desk-Top Music) ソフトウェアの充実により、音響信号に望むところの処理たとえば、フィルタ、イコライザー、エフェクターなどはずいぶん自由自在に施せるようになった。操作系のヒューマンインタフェースも進化し、作業デスクトップで視覚的操作により、機能オブジェクトの接続、ドラッグ&ドロップで信号の入出力などが可能となった。また、信号波形やスペクトルを視覚的にモニターしながら聴取することで、エフェクトなどの効果を実感しやすい。その一方で、機能オブジェクトの内部はブラックボックス化している。これらを有効に使いこなすためには、アナログ機器を使いこなすように、その機能を入出力の関係でとらえて理解することが第一歩であろう。さらには、デジタル処理ならではの制約や付帯的現象の理解、内部動作原理の大まかな捕捉ができることが望ましい。それにより、処理パラメータとその効果の関係に推測が働き、新しい効果の創造につながることを期待される。授業では、厳密に数式を追って理解することは求めず、数式は理解を助ける補助的な位置にとどめた。むしろ、至極単純な操作である遅延や重ね合わせ、関数の積などをイメージできることができるよう配慮することとした。本文では初めにデジタル信号処理とアナログ処理の大きな違いを示す。次いで、デジタル処理の基本となるサンプリングについて初学者向けの解釈を示す。さらに、基本的なフィルタの構成原理を例を用いて示す。また、Z変換を導入して、フィルタの解析を行う。さらに、実現例として、スプレッドシートを用いた演習問題を解く過程により、充実した理解に進む道筋を示す。

2. デジタルフィルタの特徴

フィルタのように周波数に選択的に働く機能は、アナログ電気回路では、電流と電圧の関係が時間の積分または微分になる素子を組み合わせることで実現されていた。交流回路を構成するうえで正弦波をオイラーの公式を使って複素数で表す手法はここでもきわめて強力かつ簡潔であり、フィルタの設計理論は洗練されていった。このためか、アナログフィルタの設計知見をデジタルフィルタにも生かそうという考えも根強い。しかし、デジタルフィルタの初学者にとっては、アナログ電気回路からのアナロジーでデジタルフィルタの理解を進めるのは無駄な遠回りである。周波数依存する、波の位相の重ね合わせによりフィルタが実現されるとみなせば、位相変化ともたらずのが微分素子や積分素子ではなく、直接的なサンプリング時間遅れであるデジタルシステムははるかに直接的にイメージを持ちやすいはずである。

2.1 サンプリング

デジタル信号処理系の信号の流れは、低域通過フィルタ、A/D変換、遅延、積和演算処理からなる線形な内部処理、D/A変換、低域通過フィルタを辿る。入り口であるA/D変換はその量子化ひずみが無視できる程度に精度の良いものが普及し、信号の情報量はいまや微々たるものである。そこで、サンプリングの意味するところ、遅延信号の加算演算の意味するところから始める。サンプリングで初学者が戸惑うのは、サンプリングによってもともと存在しない周波数成分が、しかも正負無限に現れることだろう。負の周波数成分は前稿で説明した通り、複素表現での実数化をシンプルに表すため逆方向に回る回転振動を対に加えたと思えばよいが、サンプリング周波数 f_s ごとに繰り返す周波数成分は解釈を必要とする。そこで数学は避けるといっても、デジタル系のデルタ関数には触れざるを得ない。

2.2 デルタ関数の導入

アナログ系のデルタ関数は幅が無限小で面積が1になるという難解な極限概念が必要なものであったが、式(1)のように、関数 $f(t)$ のある時点の値を抜き出すことができる。離散系のデルタ関数は式(1)'で表される。ここに、 T は離散時間単位すなわち、サンプリング周期であり、 $\delta[k]$ は1と0という値をとるのみであり大変親しみやすい。 δ 関数とその時間シフトのみで、直ちにステップ関数式(2)が得られる。

$$\text{式(1)} \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t) f(\tau) d\tau$$

$$\text{式(1)'} \quad \delta(t - kT) = \delta[k] = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{式(2)} \quad u[k] = \sum_{n=0}^{\infty} \delta[k - n]$$

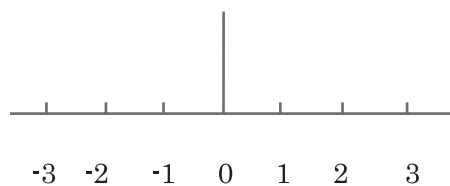


図1 デルタ関数

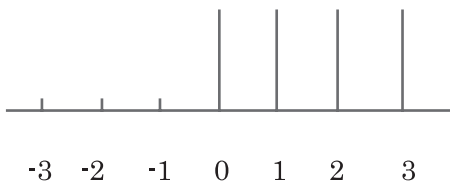


図2 ステップ関数

2.3 デルタ関数の周波数特性

δ 関数のフーリエ変換は直ちに得られ、式 (3) のように、一定の値ですべての周波数成分を含む。

$$\text{式(3)} \quad F\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t} dt = 1$$

Tシフトした δ 関数のフーリエ変換は 1 ではなく、絶対値が 1 で、T に依存する位相成分を持っている式 (4) となる。

$$\text{式(4)} \quad F\{\delta[k - m]\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - mT)e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega mT}$$

サンプリングとは、元の信号にこのステップ関数を乗じる演算とみなせる。定常信号が対象であれば、過去の無限からの繰り返しとみなせばよい。

任意の信号はサンプリングにより時間対振幅の 2 次元関数から、唯一の δ 関数とそのシフトの総和へ単純化される。それ以降は、元の信号の時間依存的な性質はすべて忘れることができ、その特性は δ 関数とそのシフトへの係数として現れるのみである。したがって、フーリエ変換に類する線形処理では、 δ 関数列のフーリエ変換のみ考慮すれば、あとはその 1 次結合が残るのみである。

2.4 サンプリング信号の周波数スペクトル

2.4.1 サンプリングパルス列の周波数特性

さて、無限に続く δ 関数の T シフトすなわちサンプリングパルス列 δ_s は周期 T の周期関数であるから、基本周期 T とその高調波成分に級数展開できる。係数を求めるには、周期 T の周期関数なので図 3 の様に 1 周期の積分で良い。

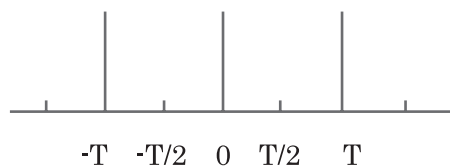


図 3 サンプリングパルス列のフーリエ級数展開

結果は式 (5) のように、無限に続く高調波成分がすべて同じ大きさを持つことになる。そのフーリエ変換は式 (6) であるが、理科系の学生にもこの積分計算は困難である。そこで、周波数領域の δ 関数とそのシフトのフーリエ逆変換式 (7) を準備する。

$$\text{式(5)} \quad \delta_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t)e^{-i\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

$$\text{式(6)} \quad F\{\delta_s(t)\} = F\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\omega_0 t}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{-i(\omega - k\omega_0)t} dt$$

$$\text{式(7)} \quad F^{-1}\{\delta(\omega - \omega_0)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} e^{i\omega_0 t}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

逆変換が元の変換と相互に往復することを受け入れると、サンプリングパルス列のフーリエ変換は式(8)となるのがわかる。

$$\text{式(8)} \quad F\{\delta_s(t)\} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - k\omega_0)$$

離散系の δ 関数は簡単だといったが、大目に見てもらいたいことがある。定義式のとおり、 δ 関数の積分が現れるが、この時の δ 関数は本来の連続系の極限值による δ 関数として振る舞うことと都合よく解釈する。また、フーリエ変換で無限に続く一定値の項を加算するので、結果は発散するはずだが、それが δ 関数であり、離散系の表現では大きさ1としている。こうした解釈を受け入れると、時間的なパルス列は、周波数的にも等間隔のパルス列となることがわかる。単独の δ 関数のスペクトラムが全周波数に広がる一定値にもかかわらず、等間隔 δ 関数列である δ_s のスペクトルは一定周波数間隔パルス列となってしまうのは不思議な気がする。これはインパルスが大きさだけでなく、正負の振幅と位相を有する波の一種であることを思い起こさせる。

2.4.2 サンプリングによる周波数特性

連続信号 $f(t)$ はサンプリングによりどんなスペクトラムを持つのか考える。 $f(t)$ のスペクトラムは、後の重なりによる煩雑を避けるためナイキスト条件を満たす $F(f)$ とする。時間領域の積が周波数領域の畳み込みなるというフーリエ変換の性質を思い起こせば、 $F(f)$ と $1/T$ 間隔の δ 関数列のスペクトルとの畳み込み、すなわち $-1/2T < f < 1/2T$ で原点对称、 $1/T$ 周期で繰り返す $F(f)$ を示す図4が得られる。斜線部の $F(f)$ がサンプリング以前の信号のスペクトラムである。これが繰り返す折り返し周波数成分の正体であることがわかる。

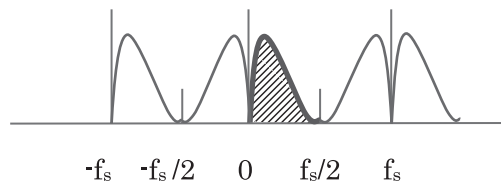


図4 サンプリングされた信号のスペクトラム

3 遅延信号加算

3.1 正弦波の遅延加算

正弦波信号に対し、1 サンプル遅れの信号を加算するとどうなるか示してみよう。1 サンプルの遅延時間は一定でも、入力する周波数が直流から $f_s/2$ に変化するとどうなるか、想像してみる。直流に近い低周波ではほぼ同一の波が重ね合わされ、 $f_s/2$ 付近ではほぼ逆相の関係となることは直観的に理解できる。

3.2 周波数特性

$x(t) = e^{i\omega t}$ に対して、時間 T だけ遅れた波は $x(t-T) = e^{i\omega(t-T)}$ と表される。元の正弦波と時間 T 遅れ、ゲイン a 倍した信号を加えた波 $y(t)$ は、次式で表される。

$$\text{式(9)} \quad y(t) = x(t) + ax(t-T) = e^{i\omega t} (1 + ae^{-i\omega T}) = x(t)(1 + ae^{-i\omega T})$$

ここで、右辺第 2 項は入力信号を変化する機能（フィルタ）を表す。（伝達関数と呼ぶ）ブロックダイアグラムでは以下のように表される。

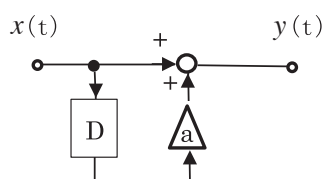


図5 1 サンプル遅延加算のダイアグラム

フィルタの周波数対振幅特性は次式のように絶対値をとる事でわかる。

$$\text{式(10)} \quad \left| \frac{y(t)}{x(t)} \right| = |1 + ae^{-i\omega T}| = \sqrt{(1 + a \cos(\omega T))^2 + (a \sin(\omega T))^2}$$

$$\text{式(11)} \quad = \sqrt{1 + a^2 + 2a \cos(\omega T)}$$

T が 1 サンプルの遅れであると、サンプリング周波数 f_s として、 $T=1/f_s$ から、 $\omega T=2\pi f/f_s$ となる。

$$\text{式(12)} \quad \left| \frac{y(t)}{x(t)} \right| = \sqrt{1 + a^2 + 2a \cos(2\pi f/f_s)}$$

周波数 f が $0 \leq f \leq f_s/2$ の範囲で変化するときフィルタの振幅特性がどうなるか図示してみよう。

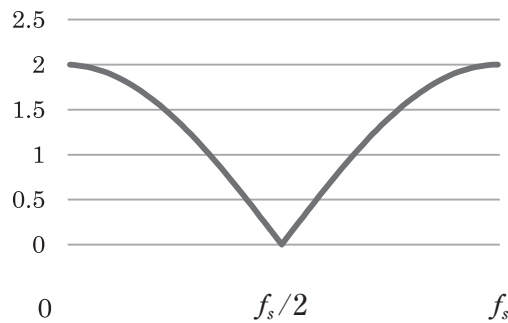


図6 1次移動平均フィルタ周波数特性

位相特性は、式(13)で表される。

$$\text{式(13)} \quad \tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\text{Im}(1 + ae^{-i\omega T})}{\text{Re}(1 + ae^{-i\omega T})}$$

フーリエの法則によればすべての周期信号は正弦波信号の和であるから、2つの角周波数 ω_1, ω_2 の正弦波の和 $x(t)$ を考えれば

$$\text{式(14)} \quad x(t) = a_1 e^{i\omega_1 t} + a_2 e^{i\omega_2 t}$$

$$\text{式(15)} \quad x(t-T) = a_1 e^{i\omega_1(t-T)} + a_2 e^{i\omega_2(t-T)}$$

線形性から、以下全く同様に扱えるのでフーリエ変換領域では、 $e^{-i\omega T}$ を乗ずることが時間領域信号の1サンプルシフトに相当することが理解できると思う。

3.3 差分方程式（漸化式）とブロックダイアグラム

3.3.1 MA (Moving Average 移動平均) フィルタ

離散系のデジタルフィルタは遅延信号の直接加算で構成されるので電気素子による回路網よりもはるかに理解しやすい。最も単純な1次遅れの移動平均フィルタは遅延加算の例としてすでに解明した図5, 6のとおりである。

離散系らしく時刻 t の代わりに整数サフィックス n を用いて $y_n = 0.5(x_{n-1} + x_n)$

このフィルタの特性は前述のとおり、比較的容易に求められるが、もう少し別の特性を望んでフィードバックループを持つフィルタはどうなるだろうか。

3.3.2 AR (Autoregressive 自己回帰) フィルタ

出力信号の遅延分を加える構成

$$\text{式(16)} \quad y_n = r y_{n-1} + x_n$$

を構成してみる。 $x_0=1, x_n=0 (n \neq 0)$ を入力すると $y_n = (0, 1, r, r^2, r^3, \dots)$ 無限に続く等比

数列となる。ただし、MA1 次と同様の手順で周波数特性を求めるのは容易ではない。入力信号をインパルスではなく、さきと同様正弦波として、 nT の遅れ波を重ね合わせると

$$r^n e^{-ionT}$$

という項の 1 次結合が現れる。 $|r| < 1$ なら収束して $y_n = x_n / (1 - r e^{-i\omega T})$ となり、差分方程式がめでたく伝達関数化できるのは等比級数の計算のたまものと実感するところだ。2 次遅れのフィードバックを含んでも巧妙に因数分解により不可能ではないかもしれないが、さすがに実用的ではない。但し、c プログラムなどでフィルタを実装する限りでは、ブロックダイアグラム通りに積和处理を行えばよいので、差分方程式のままの理解でなんら不都合はない。また、FIR 型で長次数の畳み込み演算を実施するときも順次積和を求める畳み込みの式に疑問を感じることもない。アルゴリズムの実装に数式の変形能力が必ずしも必要がないのが面白いところでもある。さて、この時の周波数特性はスプレッドシートの助けを借りると良い。1 年次にコンピュータリテラシーが必須科目であり、その中に関数計算を含むスプレッドシートの扱いが含まれているのは幸甚である。周波数分解能 f/f_s を 1/100 程度の適当な値に定め例えば D 列に並べ、伝達関数の分母の実部が

$1 - r \cos(2\pi f/f_s)$ 、虚数部を $r \sin(2\pi f/f_s)$ として例えば E 列に
 =COMPLEX(1 - r · cos(2πf/fs), r · sin(2πf/fs)) として並べ、途中計算はすべて
 =IMABS(IMDIV(1, E11)) などの様に関数機能にゆだねれば、帰還ゲイン r をパラメータとして、図 7 に示すような周波数特性が舜時に得られる。

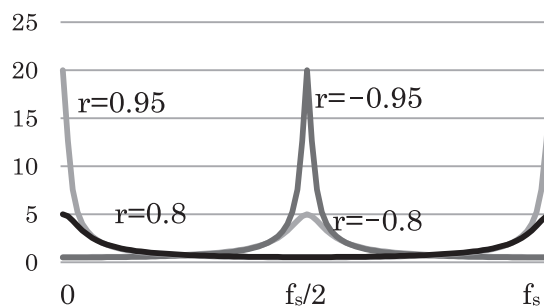


図 7 AR 型 1 次フィルタ周波数特性

学生演習者はこの段階ですでに、正弦波入力に対し、 nT の時間遅れが信号に e^{-ionT} を乗じることであると気づかされる訳であり、後に Z 変換を説明するための伏線となっている。

4. Z 変換

4.1 Z 変換の定義

天下り的に Z 変換の定義を式 (17) と示す。

$$\begin{aligned} \text{式 (17)} \quad Z\{x[k]\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k} \\ z &= e^{sT}, x(kT) = x[k] \end{aligned}$$

一般的には、Z 変換は δ 関数を用いたサンプリング信号に対して、ラプラス変換を適用

したものと説明されている。ラプラス変換になじみのない初学者に対する、Z変換の解釈を試みよう。ラプラス変換は、 $L\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$ であるが、サンプリングされた信号

$$x_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT)$$

にラプラス変換を適用すると式(18)の第1行が得られる。kに関する総和は時刻tに無関係なので、積分から抜けて第2行となる。 δ 関数の積分は式(1)で示したように時刻 $t = kT$ だけの関数値を抜き取るので式(17)が得られる。

$$\begin{aligned} \text{式 (18)} \quad L\{x_s(t)\} &= X_s(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT) e^{-st} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) e^{-st} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) e^{-skT} \end{aligned}$$

4.2 フーリエ変換、ラプラス変換との関係

電気工学科の学生時代、ラプラス変換はともかく、その逆変換にあたって出現する周回積分と留数定理を理解しあぐねている自分を見かねて「ラプラス変換は微分・積分を乗除算に換える演算子法だと思って使えばよい、もとはヘビサイド演算子法だった。」と先輩が助言してくれたことを思い出すと、ラプラス変換の離散系版であるZ変換も z^{-1} を遅延演算子と割り切って使えばよいようだが、非理科系学生の共感を得るにはもうひと押しが必要である。さて、この先輩の助言は、当時対象としていた電気回路網がLCRからなるもので、入力は定常信号か、インパルス、ステップ信号であり、それに対する応答信号を求めるものだったことを考慮すると、なかなか適切なものであった。すなわち、回路網の電圧対電流関係は高々二階線形微分方程式で表される世界であり、解の形は

$a e^{(c+i\omega)t}$ (cは実定数) になることが分かっているので、微分演算は $s = c + i\omega$ の s の乗算、積分は s による除算として回路網問題を解いて整理したあと、逆変換は数学の達人である諸先人の成果である変換表に頼れば、過渡応答特性はたちどころに求まるわけで、周回積分にこだわる必要はなかったのである。離散システムに話を戻すと、先に示した遅延演算子の直観は δ_s を乗じた信号にフーリエ変換を施すことで、直観のみにたよる居心地のわるさから解放されると思う。ここであえてラプラス変換でなく、フーリエ変換といったのは、収束する場合のみを扱えばよいので、学生に無用の拒絶感を抱かせないためである。ラプラス変換にあらわれる $e^{(c+i\omega)t}$ の c は変換時に収束性を保証するために持ち込まただけであり、 $t \rightarrow \pm\infty$ のとき関数が0になるよう付加したわけで、収束するなら $c = 0$ で構わず、フーリエ変換そのものである。

4.3 伝達関数の周波数特性

さて、2次以上のARMA型のフィルタの伝達特性を式(11), (12)と同じように求めるのは気が遠くなる作業だというのは一度チャレンジしてみれば懲り懲りである。Z変換のありがたいのは遅延演算子として z^{-1} を使うことで、入出力関係が差分方程式ではなく、伝達関数のインパルスレスポンスとして式(21)のように独立して表されることに尽きる。

工学部の授業では、すでにラプラス変換を既習であり、解析関数の授業も済んでいるため、Z変換はラプラス変換の離散系版であるという説明がなされるが、これは避けることにしている。説明としては、サンプリングされた信号に対するフーリエ変換であり、特に定常的な継続信号にではなく、式(17)から想像されるように単一パルスや短いパルス列を扱うときに威力を発揮する。そこで、その理解には先に示したサンプリングの意味こそが最重要となる。

(1) Z変換を用いた伝達特性

図8に示すブロックダイアグラムで表した2次のAR型の構成式(19)はZ変換すると式(20)となり、その後整理して式(21)の様に表される。

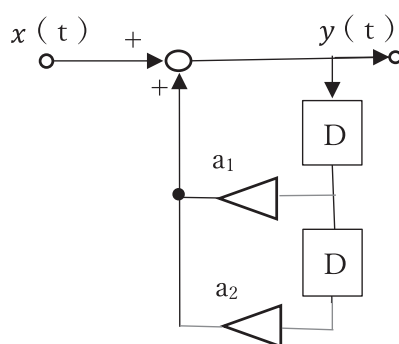


図8 2次AR型のダイアグラム

$$\text{式(19)} \quad y_i = x_i + a_1 y_{i-1} + a_2 y_{i-2}$$

$$\text{式(20)} \quad Y = X + a_1 z^{-1} Y + a_2 z^{-2} Y$$

$$\text{式(21)} \quad Y = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} X = \frac{1}{f(z)} X$$

より高次の構成も必ず2次と1次の組み合わせに分解できるので2次の構成を十分に分析しておけば十分である。伝達関数の積はブロックの縦続接続、和は加算(並列接続)となる。 ω の関数としての伝達関数が、一般には複素数として現れるが、オイラーの公式を思い出せば、絶対値が振幅を、偏角が位相を表していることがわかる。ブロックダイアグラムは時間領域で入力信号に対し畳み込み演算を示している。Z変換はフーリエ変換と同種の処理であるため、変換領域ではフィルタと入力信号の積になっていることも明らかである。

(2) スプレッドシート

2次のARフィルタの周波数特性を3.3.2の例に倣い、スプレッドシートの助けを借りて求めてみよう。伝達特性の分母 $f(z) = 0$ が因数分解できて実根を持つ場合は1次の組み合わせとなるので除くと、複素共役解が $re^{\pm i\theta}$ の形になる場合を考える。解の配置が図9の様に置けるため、根と係数の関係から a_1, a_2 はあらかじめ式(22)のように書ける。

式(22) $a_1 = 2r\cos(\theta), a_2 = -r^2$

$f(z) = 0$ の解 $re^{\pm i\theta}$

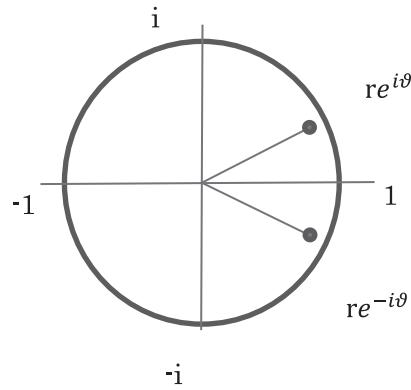


図9 2次 AR フィルタの極配置

解の位置が極になり、極配置がピークの周波数を示すイメージを持っておいて、演算は用意された関数を利用する。実部、虚部を整理して用意された複素数関数を用いれば、係数をパラメータとして、図10が得られる。収束条件を満たさないパラメータでは当然除く。

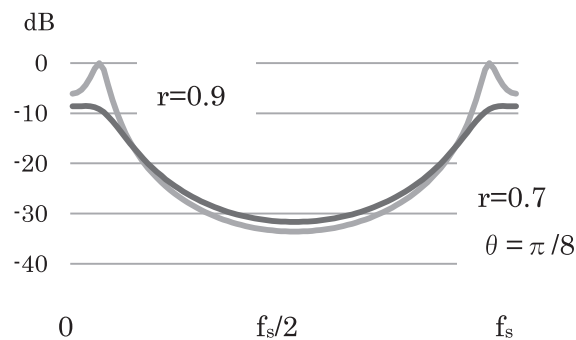


図10 AR型2次フィルタの周波数特性

5. おわりに

非理科系の学生に音響信号処理の授業を十余年にわたって行ってきた経験から、現実的に必要な理解をもたらす授業法の工夫をまとめた。工学部の授業では数式から自明として通り過ぎる事柄に直観的イメージにつながる解釈を示すことで理解を助けられると思う。数学的には極限值や収束性に関する議論を避けているのは、信号処理を制作のツールとして使いこなし、さらには制作に必要な機能を新たにイメージできるようにするための基礎理解を目標としているためであり、一通り処理のイメージを得たうえで改めて収束条件な

どを精密に考察できれば、それに越したことはないと思う。最後に、デジタル信号処理については諸先輩により数々の良書が出版されているので参考にさせていただいたものを [1] から [4] に示す。これらは工学的に正しい理解を得るために好ましいものであるが、非理科系の初学者にはやはり難しく感じられるため、冗長を承知で既知の処理や数式について解釈を述べさせていただいた。

[文献]

1. 大石進一 「フーリエ解析」 岩波書店
2. Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schaffer “Digital Signal Processing” Prentice-Hall
3. 竹内淳 「高校数学でわかるフーリエ変換」、講談社
4. 池原雅章・島村哲也 「MATLAB マルチメディア信号処理 上」 培風館