尚美学園大学芸術情報研究 第24号 抜刷

非理科系学生のための音響学

Acoustics for students not majoring science

2015 年 3 月

林　　伸二

尚美学園大学芸術情報研究　第24号　論文

非理科系学生のための音響学

Acoustics for students not majoring science

林　伸二
HAYASHI, Shinji

［抄録］
高等学校で理科系教育を受けてこなかった学生が、音響クリエータをはじめとする音響、音楽関連のキャリヤを志向するとき、基礎的に必須となる音響・信号処理の素養を身につけることを想定した授業を構成するために必要となる留意事項、ノウハウをまとめたものである。体系的に不十分であることは承知で、授業に割ける時間も限られた条件下で音響、信号処理の知見をユーザーとして利用する立場に割り切り、音響振動の原理、正弦関数、フーリエ解析の基礎について、理論的な厳密性はさておき、大筋で原理を直感し、できれば理解することを目的とした授業法という立場でまとめた。本文では、はじめに授業に必要とされる背景、従来の音響・信号処理教育の実情を既存の教科書類を振り返って示す。ついで、音響基礎論において留意した音響振動の基礎と正弦関数、複素数、フーリエ解析、対数関数に関して授業を進める上の留意点を示す。

キーワード
音響振動　正弦関数　フーリエ解析　授業法

［Abstract］
This paper presents a study on how to give lectures of acoustics to students who have not sufficient background in physics or mathematics. The lecture is prepared paying little attention to mathematical preciseness or systematic completeness under condition of restricted volume. On the contrary, students are regarded as artistic creators who utilize the products of the acoustics such as DAW and Music Assistance Applications, which leads to requests of mastering basis of acoustic vibration, sinusoidal functions, Fourier analysis. Firstly, a review of current educational texts on acoustics is presented. Secondly, special attention in the acoustics lecture is presented over simple harmonic motion, sinusoidal functions, and Fourier analysis.

Keywords:
Acoustics, education method, simple harmonic motion, sinusoidal functions, Fourier analysis

まえがき

尚美学園大学の芸術情報学部で音響基礎論のほか、音響情報処理の講義と音響信号処理の演習授業を担当してから十余年となる。学生諸君は一部に普通高校の数学 III, C を履修済みか、工業高校を卒業した者も含まれるが、大多数が数学は I, A まで、高々、II, B まで履修したという、「文化系」を自認する者たちである。当然高等学校理科で物理を選択した者はまれであり、生物か一部に化学を選択した者が含まれる程度である。しかしながら、音響に対する興味は根強いものがある。これは、音楽に対する関心の強さが際立っており、ギターやドラムなどを演奏して、バンド活動を行なった、幼いころからピアノに親しんだ、あるいは、学校ブラスバンドや合唱で活躍した、ライブハウスでロックやポップスの演奏に熱中したという経歴を持った諸君である。演奏系を中心とする、本学でいえば音楽表現学科に入学するところまでは音楽表現に没入できないが、いわば音楽周辺で生涯キャリヤを組み立てたい、生涯の趣味として音楽とともにありたいという指向を持つものである。彼らは音響ホールなど演奏会場の PA 技術者や録音、配信にかかわるサウンドクリエータ、実写やアニメーション、ゲームなどの映像を含むコンテンツのサウンド制作などを目指しており、エンジニア的な音響へのアプローチも必要である。このような背景から、音響基礎論、音響信号処理の演習授業をあまり数学と物理に依存せず理解してもらうことが要求されている。本文では、はじめに音響学の基礎知識、理解が必要である背景について述べ、次いで、既存の教科書類を参考にして授業を構成するうえでの問題点を示す。

1. 授業構成の背景

1.1音響基礎知識の必要性

今日では人は生まれるとすぐ、既存の環境として高機能な電子機器に囲まれている。オーディオ機器や映像機器はその内部構造を意識することなく、ボタン操作を行えば所用の要求を満たして、好みの音楽や映像のコンテンツを楽しむことができる。受動的に音響・映像を楽しむだけでなく、音響的に表現を望む段階に至っても特段機能を深く理解する必要もなく、ディジタル録音機、コンピュータの DAW(Digital Audio Workstation)アプリケーション、インターネットサービスを利用することで、所期の表現に到達することが可能であり、必須なのは各環境の操作に関する知識のみと映る。しかし、このような行為に携わった学生諸君はとりわけ音響的基礎知識の必要性を痛感するようである。ディジタル MTR(Multi Truck Recorder)、コンピュータの DAW を駆使するうえでスペクトラム、デシベル、ピッチ、フェーズ、サンプリング、マスキングなどのカタカナ用語に悩まされ、はじめて、利用している機器やアプリケーションが、ブラックボックスの内部で行っていることへの疑問、興味がわき起こり「ディジタルウィザード」への道に目覚めるわけである。

1.2　既存の音響学の教科書

筆者がかつて音響授業の参考とするために利用してきたの著書の一覧を作成した。音響学は歴史が古いため著書は限りなく多いと思われ、すぐれた先人の著作を漏らしてしまっていると思うが、非理科系向きの音響授業向きを考慮したもののためお許しいただきたい。

近年になって筆者と同様な立場に立った教科書が見受けられるようになり、易しい記述により、音響の基礎の理解を目指すものが現われている。

1.2.1文献の分類

音響学に関連する教科書は、歴史が古く体系的に整理されて[1]以来1世紀半近く経ているため、数多あるが身近に参考にできるものでは、(1)　数学、物理にあまり依存せず聴覚や音声を中心として書かれ、文系的興味からも入りやすいが、理解という意味では十分な素養が必要なもの[2, 3, 4, 5]、　(2)　工学部の教養課程を修めた程度の工学的素養を要する音響工学的入門書[6, 7, 8, 9]、　(3)　高校数学の範囲内の知識で音響工学上重要である知識の習得を助けるもの[10, 11, 12, 13, 14]、(4) 音響学の理論的理解に必要な数学的知識を得るための教科書[15, 16, 17, 18]、を列挙してみた。結局、初学者が体系的な理解を身に着けるためには、音響に関連する数学的理解が必要となるうえ、ある理解を得るために、どの教科書のどの部分を理解すればよいかという、道案内が得られないため、音響理論や信号処理理論は難しくて取りつくことができないものになっていた。

2．授業構成の重点項目

2.1　なぜ正弦波が基本なのか

音響理論の教科書をひもとけば、常に正弦波がすべての音響振動波形の元であるとして正弦関数の理解が読者に求められる。それ以降の議論の展開を思えば至極当然ではあるが、文科系を自認する学生にはここですでに壁を感じることになる。３角形の辺の比率と理解していた関数が０度から90度の範囲を超えて、正負ともに果てしなく増減する角度に対応するように拡張することの他に、なぜ正弦波が基本なのか、説明なく天下りで出てくることへの疑問が本質であるように思う。そこで第一に、図１に示す重りとばねからなる単一振動系のモデルの導入を試みる。数学とともに物理学を遠ざけている者にとって余計困難をもたらすという心配には及ばない。単一振動系というモデルは凡そすべての物質世界で余計な属性を剥ぎ取り、質量と加速度と変位と力の関係だけに着目すれば、すべてに当てはまるものであり、工学的に言えば二階の線形微分方程式によって表わされるということは直感的理解を得られるものである。質量 m、変位 x、ばね定数 s、抵抗 r、力 f の関係か

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+r\frac{d\ x}{dt}+sx=f \qquad (1)$$

ら式（1）が成り立つ。簡単のために式（1）の損失分を無視し、r ＝ 0としたとき、これを満足する関数が正弦関数であると知られていることが、すべての始まりである。理解を助けるため、正弦波、余弦波は図２に示すように単位円上を一定の角速度で回転する点の直行軸への射影であると拡張しておくのが必須である。この波形は興味深い性質があり、その時間に対する変化率（微分）が再び元の波形と同一の形となり、正弦波から余弦波と微分のたびに転換することであるが、こうした性質を知ることに知的興奮を覚えることで自然への興味に踏み込むきっかけになるようだ。ここで、微分に抵抗があると思うが、単に変化率、グラフでいう傾きというだけで支障ない。むしろ、極限値などを厳密に論じて壁を作るほうが問題である。積分も同様であり、面積という理解で十分である。曲線に囲まれる面積の算出が直観できないなら、短冊状の台形面積の寄せ集めで十分である。

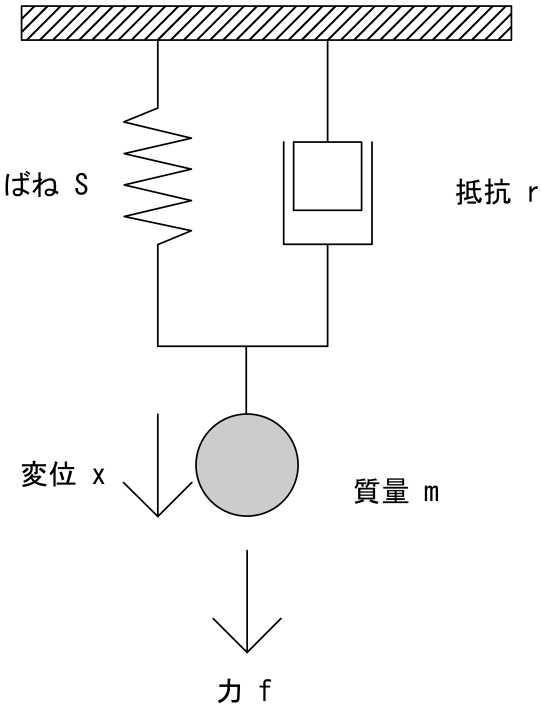

図１　単一振動系

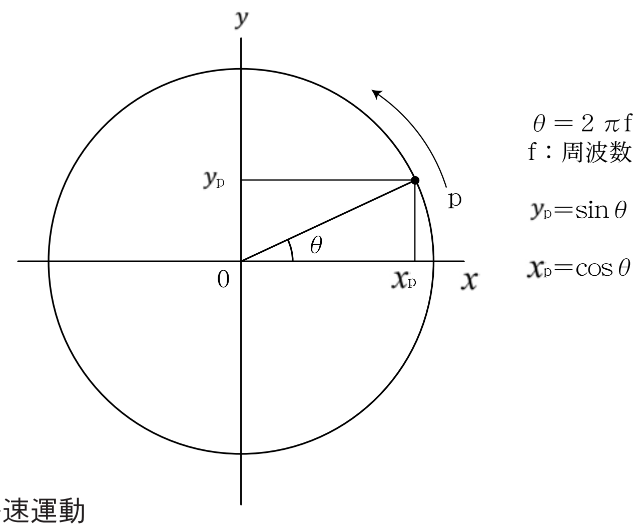

図２　単位円上の等速運動

2.2　正弦関数の属性

次いで、正弦波の基本属性として周波数、振幅、位相という３つの定数で一意に定まるという説明が続くことになる。音楽、音響への興味が中心の学生のためにここで聴覚的な特性との関係に進むのが順当ではあるが、後のフーリエ解析への布石として、なぜ同じ形をしている（位相をずらせば合同である）にも関わらず、正弦波と余弦波が必要なのかという疑問に答えておく必要があろう。単独で聴く限り正弦波と余弦波は聴覚的にまったく差がないのであるから。

2.3　直交性の概念

少しずらせば（時間シフトすれば）互いに同一のものが相互に代用が効かないことを理解させる。直交性の定義は式（2）のとおりであり、何の説明も要しない、式の変形を行

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)g(x)\,\mathrm{dx} = 0 \quad (2)$$

えば自明である、とするのは工学者の思い込みであり、関数の積の積分が直ちにイメージできると思うのは早計である。のちにサンプリングや PCM(Pulse Code Modulation)符号化について触れることもあり、離散系での説明がはるかにイメージしやすい。図３に示すようにサンプリング各点における積和を１周期にわたって求めればよい。併せて相互相関関数の説明にもなり、同一関数でシフトを考えれば自己相関関数である。

ここで初めて、周波数、振幅が与えられたとき、任意の位相を含む正弦波が、位相成分を０とした正弦関数と余弦関数の一次結合で表わされること式（３）が理解できる。加法

$$\begin{aligned}\sin(\omega t + \theta) &= \cos(\theta)\sin(\omega t) + \sin(\theta)\cos(\omega t)\\ &= a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t) \quad (3)\end{aligned}$$

定理を用いれば自明であるが、のちにフーリエ解析結果において、位相を直接表記せず、複素成分で表わすための準備として、知っておくに越したことはない。ある周波数の正弦波の振幅、位相を変化したとき２次元の平面を覆うことになるが、陽に偏角を用いずに２つの直行成分で同じことができるという、ベクトルイをメージした説明も有効と思われる。

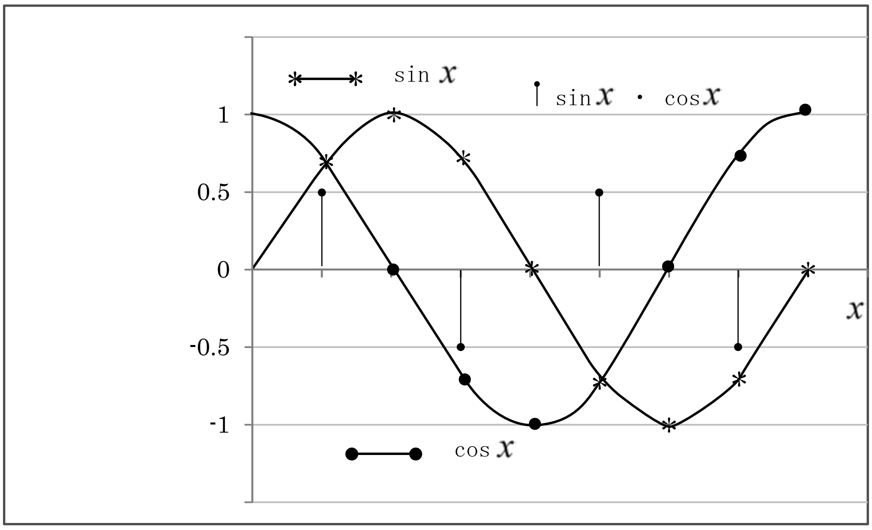

図３　直交性

2.4　フーリエ級数

音響信号を語るとき避けて通れないのがフーリエ級数である。フーリエ(Jean Baptiste Joseph Fourier)は１８, ９世紀の卓越した自然科学者であり、熱力学の基礎を作ったほか行政の世界でも活躍した多能の才人であったことで知られ、この間の歴史はロゼッタストーンやナポレオンとの関係など、文系学生の興味を大いにそそる授業ができるが、ここではフーリエ級数の理解を得なければならない。「任意の周期関数は、基本周期とその整数分の１の周期の正弦波の和で表わされる」という定理については天下りに法則として理解を求めても抵抗なく受け入れられるようだ。厳密な証明はフーリエ以降に行われたと述べ、

時間を割く必要はないが、周期関数に含まれる高調波成分の求め方から、フーリエ変換への説明は必須である。我われが現在利用するフーリエ解析のツール類はすべて FFT(Fast Fourier Transform)を利用しているといって間違いないと思われるが、まずはアナログ的手法で説明するのがわかりやすい。図４に示すダイヤグラムは３極管程度しか使えなかった時代の周波数分析器である。要は可変周波数発振器の出力と未知周期信号との相関出力を検出するものであり、相関を得るためのアナログ乗算（変調）器が得られる以前は、単に重ね合わせ（加算）で聴覚的にビート検出していたと思われるが、原理的にはこれで十分である。さて、フーリエ解析を理解するために正弦関数の積和計算で加法定理を用いて進めるのは荷が重い。そこでオイラーの公式（４）の導入となるが、準備として複素数、

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t) \quad (4)$$

複素平面の理解が必要となる。

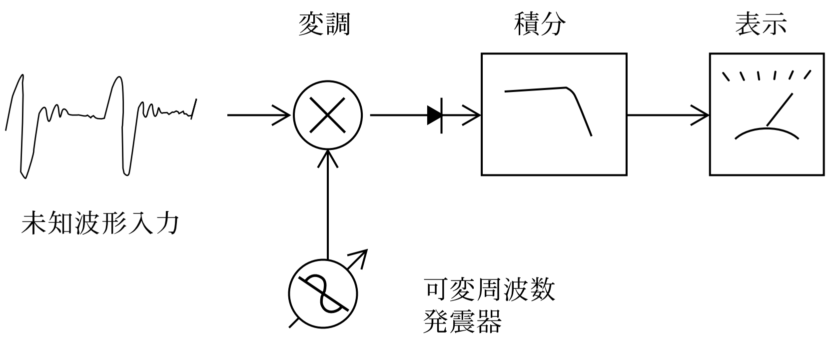

図４　アナログ周波数分析器

2.5　複素数への拡張

高校数学I，II，A，B にとどまるものにとって複素数は得体の知れないもの、２次方程式を形式的にすべて解けるようにするため導入した単位 i を含む数という理解であり、直感的イメージを持ちにくく、現実世界に役立つものという認識がなく理解への動機づけを見つけにくい。高校数学において数の拡張という観点で、自然数から整数、有理数、無理数を数直線上に表わすことは理解されている。これを発展させ $i^2= -1$ という虚数単位を導入したとき、$i^2= -1$という演算以外は、以前の四則演算が矛盾なく適用できるという拡張過程を再度理解するよう立ち戻る。そして、複素数はもはや直線状で表わすことができず、実数を表わす数直線（実数軸）に直行する虚数軸を用いて平面で表現することにより、数直線を拡張できることを示す。i を乗ずると反時計方向に90度回転することを除けばすべて数直線と同様の四則演算操作が矛盾なく適用できる。i のべき乗根も角度の等分割として矛盾なく扱われ、さらに、極形式によりきわめて直感的理解が可能となる。なぜか高校数学では数の拡張という基本概念の理解よりも複素数の算法上の技法がドリル的に重視されているようだ。

2.6　オイラーの公式の導入

オイラーの公式については数多の良書が著されており浅学の出る幕はない。文科系としては上記複素平面の理解だけはしっかりとしておけば、e の極限値を用いた定義や級数展開による証明などは知っておくにとどめ、天下りの公式として利用させていただくのが好

ましい。オイラーの公式を利用すれば、正弦余弦関数を使ったフーリエ級数式(5)はすっき

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (5)$$

$$f(x) = \sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{\mathrm{n\pi x}}{L}} \quad (6)$$

り式(6)のごとく表わされ、関数の積は何の苦も無く計算されるので、直交性の理解などすんなり進む。注意すべきは、負の周波数が現れること、周波数成分が複素数で表わされることであり、躓きの元が隠れている。

(1)　負の周波数

現実の正弦波は無論実数であり、周波数は正の数である。複素平面上の正弦波は単位円上の点が反時計回りに一定の角振動数で回転することで表現されるので、負の周波数の振動とは、時計方向に回転することによる振動と解釈できる。ちょうど実軸と対称位置に一対の点が逆方向に回転していると思えばよい。これらは複素共役の位置関係にあるので組み合わせて加算により実数を作るのに好都合であるため導入したと思えばよいので、負の周波数という奇怪な想像をする必要はない。

(2)　複素周波数成分

これも複素平面の単位円上の点の回転で正弦波を表わしているという理解があれば、単に位相を表わすために正弦成分と余弦成分の配合を用いているという直観が働くので支障は解消すると思う。元の周期関数は実数関数であるにもかかわらず、周波数成分に分解してみたら複素数であるという結果を奇異に感じる必要はないのであり、例えば元の波形に一定の遅延時間が加わった（シフト）だけでも、周波数に比例した位相ずれとなるので位相角が回転するのは当然であり、正弦成分と余弦成分の配分比率が変わるという説明がされる。

(3)　フーリエ変換

フーリエ級数が理解されれば、周期関数の周期を延長することにより単発現象のフーリエ級数として、フーリエ変換　式（7）とその逆変換　式（8）にたどり着くことができる。

$$\mathrm{F(k)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-jkx}\,dx \quad (7)$$

$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{jkx}\,dk \quad (8)$$

離散的な級数和を積分に変えるために極限に関する厳密性にこだわるよりも、時間領域と周波数領域で行き来できるというイメージを持てることが重要だと思う。ここまでで、音響現象の理解に必要な周波数解析が使えるうえ、後に信号処理の強力なツールであるｚ変換を理解するための準備ができたといえる。

2.7　対数関数

正弦関数のほかに音響を目指すものに立ちはだかるのが対数関数である。オイラーの公式で複素数の指数関数が現れるので、そこをクリアしていれば何の痛痒もないはずである

が、信号レベルの dB 表示という形で入口に控えているため、先んじて理解が求められる。これもなぜ必要かという理解が動機づけとして必要と思われる。

(1)　ウェーバー・フェフナーの法則

音響を受け取るものは聴覚である。文系学生にとって、感性からみた音響はもっとも興味深いものであり、物理音響とは対照的と言える。例えば音響信号のラウドネスがどう感じられるか、すなわち、音響パワー（なぜかアンプのボリューム位置とかフェーダつまみの位置と理解されている）と聴感上のラウドネスが自分の耳でどの程度正確に測られるか？などには興味津々となる。ウェーバー・フェフナーの法則は、式（９,10）に示すように刺

$$\left.\begin{aligned}\Delta s &= r\frac{\Delta p}{p}\\ \int ds &= r\int\frac{1}{p}\,dp\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

$$s = r\log p + const.\quad(10)$$

激pに対する感覚変化⊿sが刺激の絶対値ではなく変化率 $\frac{\Delta P}{P}$ に比例する（比例定数 r）というものであり、音量のほか、重量感などを用いて容易に感覚実験が可能であり、納得されやすい。このため、感覚に対して線形になる尺度として dB が妥当であるという説明により、対数関数を理解するための動機づけが行われる。隘路は対数関数の理解と、$\frac{1}{x}$ の積分である。

(2)　10のべき乗と指数関数

10^x というべき乗の表現は x が自然数であれば日常親しんでおり特に違和感はなく、また、$x = 0$ の場合は、$10^x = 1$ という定義をしても矛盾がないので、補数を使って x を整数に拡張し、積のべき乗の性質により、 x を有理数に拡張することに抵抗はない。実数への拡張は措くとして、連続の指数関数がイメージできればよい。指数関数の重要な性質としてその傾きが再び指数関数となることは納得してもらう必要がある。正確な理解のためには式(11)の極限値を求め、自然対数の底 e を導入しなければならないが、図５のように

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{a^h-1}{h}\right)\quad(11)$$

どこで傾きをとっても、傾きが元の関数値に等しい関数を定義したという理解でよいと思われる。指数関数が理解されれば、図６に示すようにまったく同一の関数の見方を変えただけで常用対数関数は理解される。

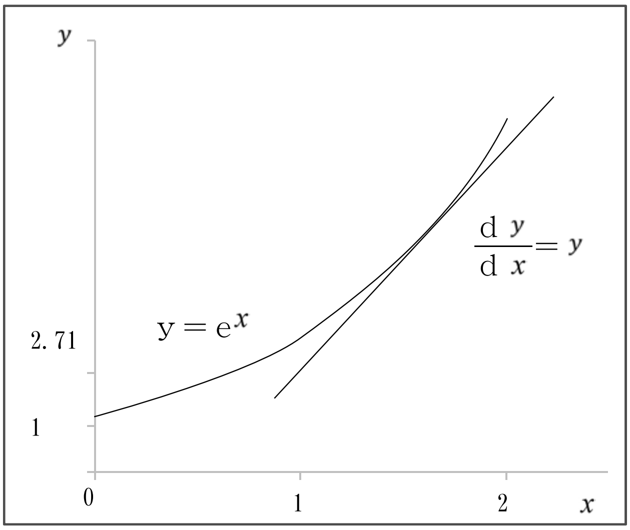

図５　指数関数

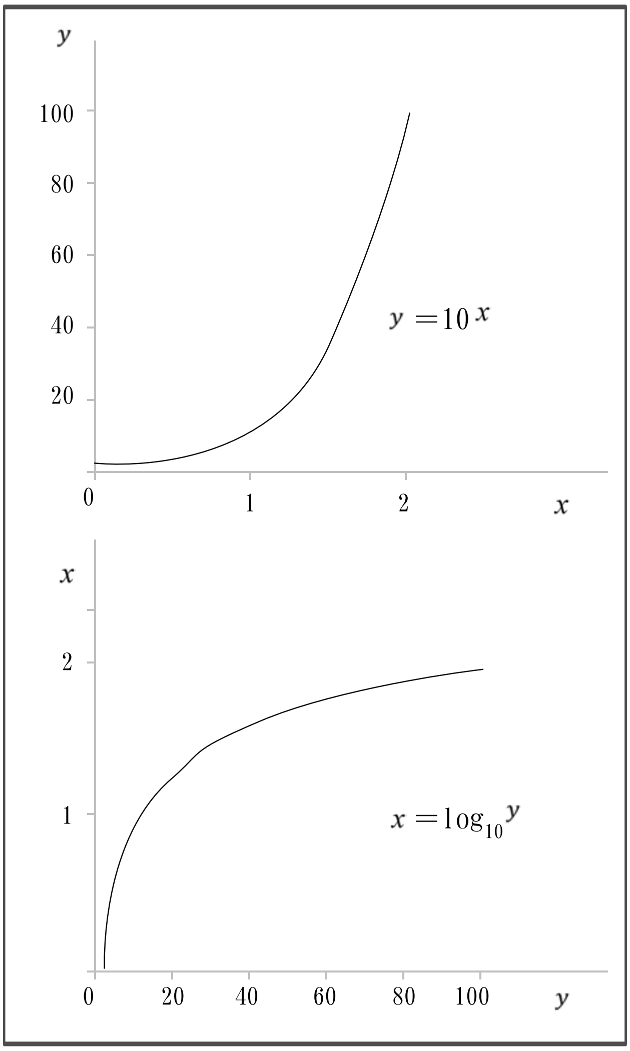

図６　指数関数から対数関係へ

(3)　$\frac{1}{x}$ の積分

$\frac{1}{x}$ の積分は関数以下の面積を求めるイメージにより $\log_e x + c$ を 図７により示すか、指数関数の微分まで理解されているなら、式（12, 13, 14）に示すように、逆関数の微分を示し理解を得る。

$$y = e^x \text{両辺の対数をとって} \log y = x \quad (12)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x) = y \text{より、} \frac{d}{dy}(\log y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} \quad (13)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log x + const. \quad (14)$$

ここまでの理解で、工学系のように自身で演習問題をこなすことはできないながら、正弦関数、指数関数、フーリエ解析という音響学上重要な項目について、かなり具体的なイメージを持つことができるようになるのではあるまいか。

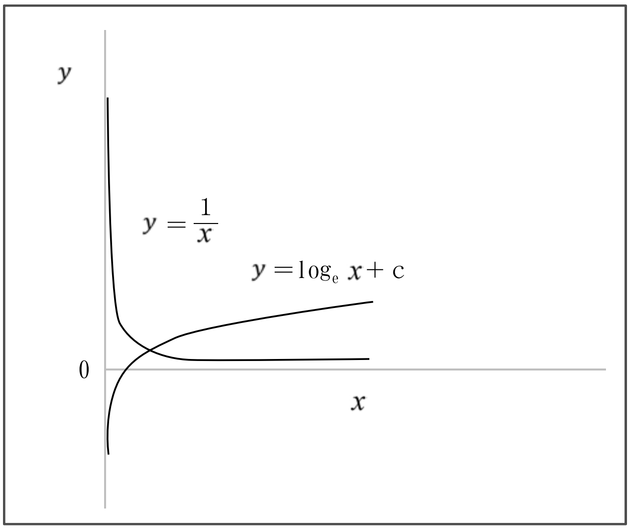

図７　$\frac{1}{x}$ の積分

３．終わりに

数学、物理学の背景を持たない学生を対象とした音響学の授業の構成と留意点について授業・演習の現場における学生の反応、理解度、感想をもとに工夫した結果をまとめた。授業シラバスの全体の流れを追う紙数がないため主なトピックスのみを抽出していわばつまみ食いしているため、ストーリーとしては不連続となったと思うが、工学系背景をもとにした経歴で、文科系学生のために工学的内容の授業を進める立場の方には、参考にしていただけるのではないかと思う。工学的システムの研究・開発者を目指すのではなく、それを芸術創造のための道具と割り切って利用する者は今後増加の一途をたどり、道具としてアプリケーションソフトが高度化、ヒューマンフレンドリー化してゆく中で、それを有効・適切に使用するため、その原理を理解しておくための授業は重要であると信じている。

文献

1. Baron John William Strut Rayleigh, "The theory of sound", Cambridge University

Press、1877
2. 難波　精一郎編　「音の科学」　朝倉書店　1989
3. 久野　和弘ほか　「音と波」　技報堂出版　2013
4. 三浦　種敏　監修　「新版　聴覚と音声」　電子情報通信学会　1980
5. 岩宮　眞一郎　「最新音響の基本と仕組み」　秀和システム　2007
6. 早坂　寿雄　「楽器の科学」、電子情報通信学会　1992
7. 城戸　健一　編著　「基礎音響工学」　コロナ社　1990
8. 西山　静雄　他　「音響振動工学」　コロナ社　1979
9. 鈴木　洋一　他　「音響学入門」　日本音響学会編　コロナ社　2011
10. 青木　直史　「ゼロからはじめる音響学」　講談社　2014
11. チャールズ・E・スピークス　「音入門　聴覚・音声科学のための音響学」海文堂出版（株）2002
12. トランスナショナル　カレッジ　オブレックス編　「フーリエの冒険」　ヒッポファミリークラブ　1988
13. 渋谷　道夫　「マンガでわかるフーリエ解析」オーム社　2006
14. 竹内　淳　「高校数学でわかるフーリエ変換」　講談社　2009
15. 日野　幹雄　「スペクトル解析」　朝倉書店　1977
16. 吉田　武　「オイラーの贈り物」　東海大出版会　2010
17. 表　実　「複素関数-理工系の入門コース」　岩波書店　1988
18. 大石　進一　「フーリエ解析　理工系の数学入門」　岩波書店　1989