

音楽理論の数理的考察 コード上のスケール (available note scale)

竹内 誠

Mathematical Study of the Theory of Music Scale on the chord(available note scale)

TAKEUCHI Makoto

Abstract

Many aspects of the theory of music consist of experience and customs, which prevents learners of little musical experience from understanding the theory.

The author has got an idea that such a problem of the traditional theory of music can be solved by restructuring the logic with mathematical way of thinking and tried to consider the theory of music mathematically.

As a result, the author could affirm that restructuring the theory of music by mathematical way of thinking can not only help understanding of learners of little musical experience but also has possibility of discovering a new way of expression in music.

In this study, the author considered the way of deriving available note scales from the notes of a chord mathematically.

By this study, the author affirmed that this theory can be applied to practical music flexibly because it can derive scales other than those in the existing frames.

Key Word: melody line, auditory stream segregation und unification, musical phenomenon, aural phenomenon, perception and recognition.

[要約]

音楽理論は経験と習慣からその多くは組み立てられており、それが音楽経験の少ない学習者の理解の妨げとなっている。

理解の妨げとなる理由は、理論の論理的説明が不十分なためである。

このような伝統的音楽理論の問題点は、論理を数理的に組み立てることによって解消が可能と思ひ至り、音楽理論の数理的考察を試みた。

その結果、音楽理論を数理的な思考により再構築することは、音楽経験の少ない学習者の理解に有用だけでなく、音楽の新たな表現の発見に繋がる可能性があることも確認できた。

今回は、コード上のスケール (available note scale) を、コードの構成音から数理的に導き

出すことを考察した。

これにより、既成のスケールの他に、既成の枠以外のスケールを作り出せることから、実際の音楽に柔軟に対応が可能な理論であることが確認された。

キーワード：音高線、音の流れの分離と融合、音楽現象、聴覚現象、知覚と認知

始めに コード上のスケール（available note scale）について

コード上のスケール（available note scale）は、コードを使って音楽を作るための基礎知識であり、アドリブ演奏にも応用されている。

コードとスケールの組み合わせは一つでなく、コードの機能により、組み合わされるスケールが決定される。

例えば Major chord の場合は、長調の の場合は Ionian が使われ、 の場合は Lydian が使われる。

黒い音符は avoid note と呼ばれ、学習者はスケールと併せて記憶する必要がある。

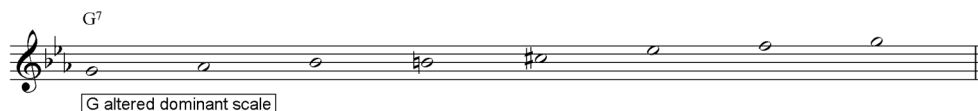


avoid note は、コードの響きに障害のある音と、コードの機能を不明瞭にする音であり、その使用が限定される音である。

Dominant 7th chord 上には、長調では Mixolydian が使われるが、短調では和声短音階の第五音からの音列を使う。



ジャズ・ハーモニーでは、オルタード・テンションを含むスケールが使われる。



今回の研究では、コードの構成音からスケールを導き出す方法を数理的に考察して、その使い方と可能性を示す。

1. コードからダイアトニック・スケールを導き出す方法

コードは3度の積み重ねで出来ていて、長3度と短3度の積み重ねである。

例えば Major 7th chord は、root から長3度、短3度、長3度と重ねられたハーモニーである。



コードからダイアトニック・スケールを導き出すためには、これらの3度音程の間に1音を加えて、全音が半音で2分割をすれば可能となる。

短3度音程は、間の半音数が三つであり、この間を全音と半音で2分割する可能性は、半音単位で1 + 2 (半音 + 全音) か、2 + 1 (全音 + 半音) のどちらかである。



長3度音程は、間の半音の数が四つであるので、この間で2分割する可能性は、半音単位で1 + 3、3 + 1、2 + 2の三つである。

しかし、このうち半音三つ分は、音程幅が全音を超えてしまうので、ダイアトニック・スケールの決まりである、五つの全音と二つの半音には当てはまらない。

従って長3度音程を2分割する可能性は、2 + 2 (全音 + 全音) の2等分だけである。



以上の考え方によって、4和音の各構成音間の3度音程から、ダイアトニック・スケールを見出すことが可能である。

2. コードから7音音階を導き出す

厳密な定義では、ダイアトニック・スケールは、五つの全音と二つの半音からなる7音音階である。

しかしコード理論では、長音階を主にダイアトニック・スケールと呼び、ダイアトニック・スケール上のコードを、ダイアトニック・コードと呼ぶ。

ダイアトニック・コード上の available note scale は、モード名で表す習慣となっている。

CM7 Ionian scale Dm7 Dorian scale
I M7 II m7

Em7 Phrygian scale FM7 Lydian scale
III m7 IV M7

G7 Mixolydian scale Am7 Aeolian scale
V 7 VI m7

Bm7(b5) Locrian scale
VII m7(b5)

4和音から以上のダイアトニック・スケールと、その他の7音音階を導き出す手順と可能性を、コード別に述べる。

2.1. major 7th chord

major 7th chord は、root と 3rd の間は長3度音程、3rd と 5th の間が短3度音程、5th と 7th の間が長3度音程である。

従って、このハーモニーから7音音階を導き出すには、長3度音程は2 + 2のみであるので、短3度を1 + 2とするか、2 + 1とするかのどちらかだけとなる。

これは、Ionian と Lydian である。

C Ionian scale

CM7 root 3rd 5th M7th

2 + 2 1 + 2 2 + 2 2 + 2



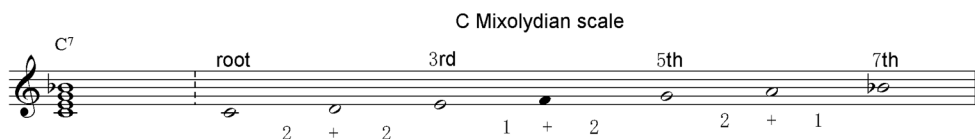
Major 7th chord から導き出せる 7 音音階は、この二つだけである。

2.2. 7th chord

7th chord は、root と 3rd の間が長 3 度音程、3rd と 5th の間が短 3 度音程、5th と 7th の間が短 3 度音程である。

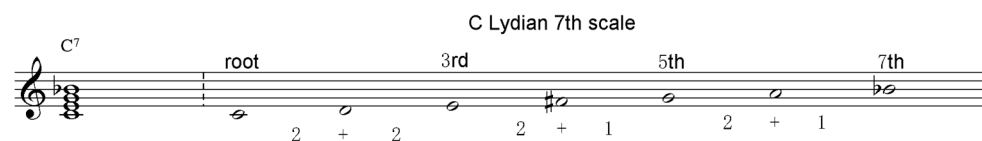
従ってこのハーモニーの可能性は、root と 3rd の間の長 3 度音程は 2 + 2 のみ、3rd と 5th、5th と 7th の間が短 3 度音程はそれぞれ、1 + 2 か 2 + 1 の可能性がある。

この可能性から 3rd と 5th を 1 + 2、5th と 7th を 2 + 1 とすると、Mixolydian がみいだせる。

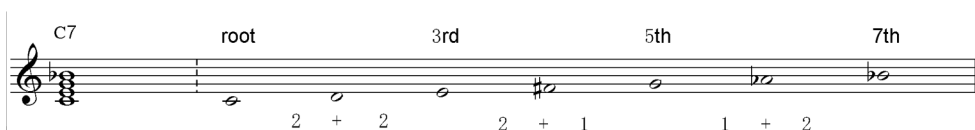


7th chord 上のコードスケール (available note scale) は、Mixolydian 以外も、コード理論では数多く使われている。

7th chord の 3rd と 5th、5th と 7th の間の短 3 度音程を、それぞれ 2 + 1 とすると、Lydian 7th scale を見いだすことができる。



これ以外に、以下の組み合わせも考えられる。



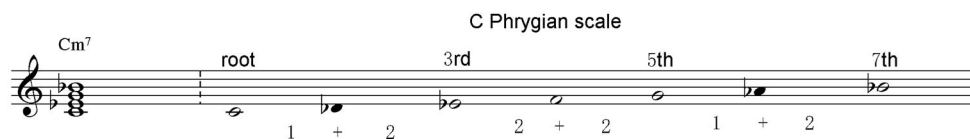
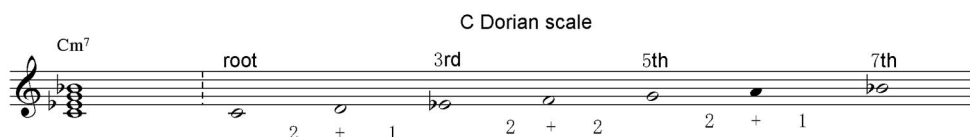
2.3. minor 7th chord

minor 7th chord は、root と 3rd の間は短3度音程、3rd と 5th の間は長3度音程、5th と 7th の間は短3度音程である。

このうち、3rd と 5th の間は長3度音程であるので、可能性は2 + 2 だけである。

root と 3rd、5th と 7th の間は短3度音程であるので、この間は1 + 2 か 2 + 1 の可能性がある。

これにより、Dorian、Aeolian、Phrygian が見いだせる。



これ以外に、以下の可能性も考えられる。



2.4. minor 7th 5th chord

minor 7th 5th chord は、root と 3rd の間が短3度音程、3rd と 5th の間が同じく短3度音程、5th と 7th の間が長3度音程である。

従って、5th と 7th 間の長3度の可能性は2 + 2 だけであり、root と 3rd、3rd と 5th 間の短3度音程は、1 + 2 か 2 + 1 のどちらかとなる。

これにより、Locrian を見いだすことが出来る。



これ以外に、以下の可能性も考えられる。

Three musical staves illustrating the Cm7(b9) chord and its scale variations. Each staff shows the chord notes (root, 3rd, b5th, 7th) and the intervals between them.

Staff 1: Cm7(b9) chord. Scale intervals: 1 + 2, 1 + 2, 2 + 2.

Staff 2: Cm7(b9) chord. Scale intervals: 2 + 1, 1 + 2, 2 + 2.

Staff 3: Cm7(b9) chord. Scale intervals: 2 + 1, 2 + 1, 2 + 2.

3. 8音階を導き出す方法

8音階も同様に、コードの構成音から導き出すことが出来る。

3.1. dim 7th chord

dim 7th chordは、1オクターブ（半音12）を、半音三つで4等分したハーモニーと考えられる。

従って、各構成音間の幅は均等に半音三つであり、これを2 + 1（全音 + 半音）か、1 + 2（半音 + 全音）で2分割が可能である。

これにより8音階である、diminished 7th scaleと、combination of diminished scaleを見出すことが出来る。

Two musical staves illustrating the Cdim7 chord and its scale variations.

Staff 1: Cdim7 chord. Diminished 7th scale. Scale intervals: 2 + 1, 2 + 1, 2 + 1, 2 + 1.

Staff 2: Cdim7 chord. C Combination of diminished scale. Scale intervals: 1 + 2, 1 + 2, 1 + 2, 1 + 2.

dim 7th chord上には、この他にも可能性が考えられるが、数が多いため割愛する。

3.2. 7th chord

4和音から8音以上のスケールを導くには、3度音程の間に2音を入れて3分割する可能性を

考えれば可能となる。

短3度を3分割する可能性を考えると、音程幅が半音三つであるので、 $1 + 1 + 1$ （半音 + 半音 + 半音）しかあり得ない。

しかしこれは半音の連続であり、スケールとして使う意味は感じられない。



長3度音程は音程幅が半音四つであるので、 $1 + 1 + 2$ （半音 + 半音 + 全音）、 $1 + 2 + 1$ （半音 + 全音 + 半音）、 $2 + 1 + 1$ （全音 + 半音 + 半音）の可能性がある。

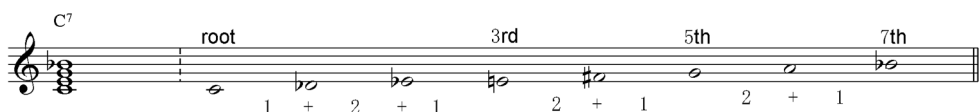
しかし、 $1 + 1 + 2$ （半音 + 半音 + 全音）と $2 + 1 + 1$ （全音 + 半音 + 半音）は、半音の連続が経過的と感じられるので、スケールとして使う意味は考えられない。

従って3度音程を3分割する可能性は、長3度音程の $1 + 2 + 1$ （半音 + 全音 + 半音）だけとなる。



7th chordのrootと3rd間の長3度を、 $1 + 2 + 1$ で3分割をすると、9thと9thを使ったスケールが出来る。

このスケールは古くから使われていて、モーリス・ラベルの弦楽四重奏にその使用例がみられる。



モーリス・ラベル 弦楽四重奏¹⁾



4. 7th chord以外での長3度音程の3分割の可能性

4和音から8音以上の音階を導き出すには、長3度音程を1 + 2 + 1（半音 + 全音 + 半音）で3分割することを考えれば可能となる。

7th chordでは、古くから使われていることは前節の通りであるが、他のハーモニーの構成音間の長3度を3分割することも可能である。

以下に、ハーモニー別に解説を行う。

4.1. major 7th chord から8音音階を導き出す

major 7th chordは、rootと3rd、5thとmajor 7thの間が長3度音程であり、この間を3分割が可能である。

The image displays four musical staves, each representing a different 8-note scale derived from a C major 7th chord (CM7). Each staff shows the notes of the scale and the intervals between them, with the long 3rd intervals (root-3rd and 5th-M7th) being divided into three parts (1+2+1) to create an 8-note scale.

- Staff 1: CM7, root, 3rd, 5th, M7th. Intervals: 1 + 2 + 1, 2 + 1, 2 + 2.
- Staff 2: CM7, root, 3rd, 5th, M7th. Intervals: 1 + 2 + 1, 1 + 2, 2 + 2.
- Staff 3: CM7, root, 3rd, 5th, M7th. Intervals: 2 + 2, 2 + 1, 1 + 2 + 1.
- Staff 4: CM7, root, 3rd, 5th, M7th. Intervals: 2 + 2, 1 + 2, 1 + 2 + 1.

4.2. minor 7th 5th から8音音階を導き出す

minor 7th 5thは、5thと7thの間が長3度音程であり、この間を3分割が可能である。

The image displays two musical staves, each representing a different 8-note scale derived from a C minor 7th 5th chord (Cm7(b5)). Each staff shows the notes of the scale and the intervals between them, with the long 3rd interval (5th-7th) being divided into three parts (1+2+1) to create an 8-note scale.

- Staff 1: Cm7(b5), root, 3rd, b 5th, 7th. Intervals: 2 + 1, 2 + 1, 1 + 2 + 1.
- Staff 2: Cm7(b5), root, 3rd, b 5th, 7th. Intervals: 2 + 1, 1 + 2, 1 + 2 + 1.



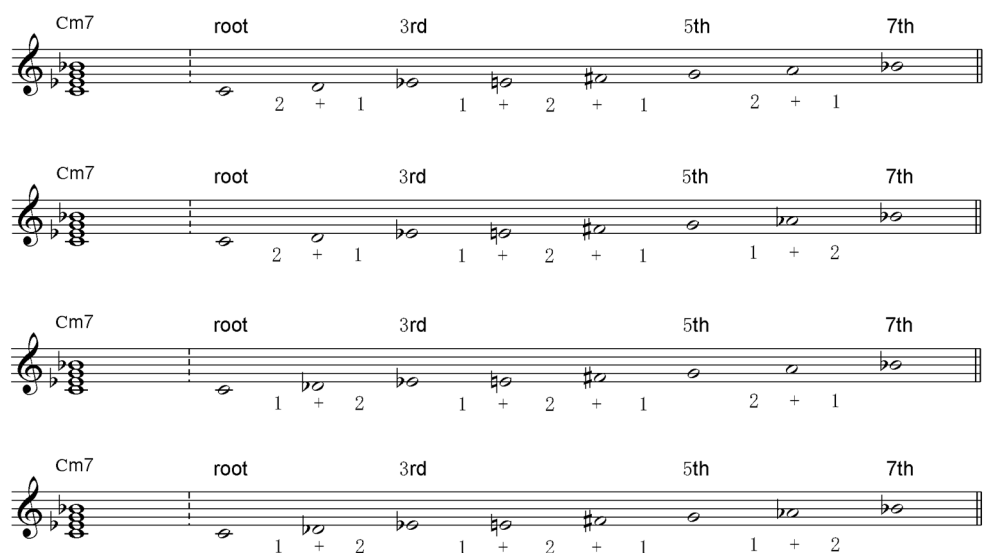
5. 新たな可能性

ハーモニーの構成音間の3度を分割することによって、既成のコード上のスケール（available note scale）の他に、新たな可能性を見出すことが出来た。

以下に、その使用例を述べる。

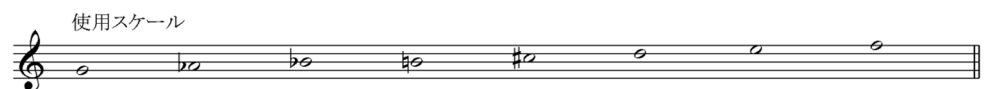
5.1. minor 7th chord での使用例

minor 7th chordの3rdと5thの間の長3度音程を、1 + 2 + 1（半音 + 全音 + 半音）で分割すると、以下の8音音階を見出すことが出来る。



これにより、ハーモニーとスケールの、新たな組み合わせが生まれる。

私の作品中からの、使用例である。



竹内誠 “深夜の憂鬱” 2)

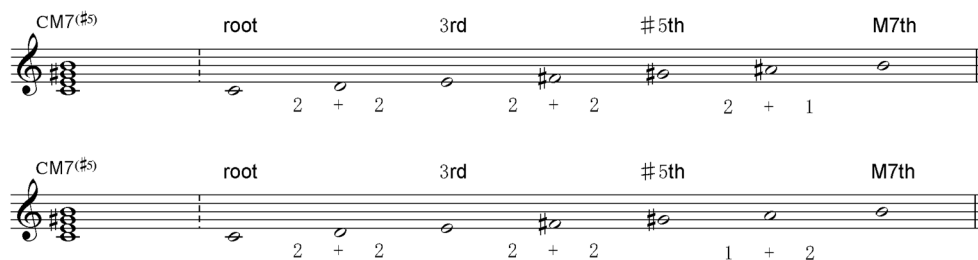
5.2. augmented chordでの使用例

augmented chordは、1 オクターブ（半音12）を、半音四つで3等分したハーモニーと考えられる。

従って、各構成音間の幅は半音四つであり、これを2 + 2（全音 + 全音）で2分割をすると、6音音階である whole tone scaleが見出せる。

また、各構成音間の幅は均等に半音四つであるので、これら全てを1 + 2 + 1（半音 + 全音 + 半音）で3分割が可能である。

また、major 7th 5th chordからは、以下のスケールを見出すことができる。



私の作品からの、使用例である。



竹内誠 “月夜に”³⁾



6. 音楽表現上の応用

コード理論ではコード上のスケール (available note scale) は、コードのrootから並べる習慣である。

しかし、コード上のスケール (available note scale) は、コードの構成音、テンション、avoid noteの区別はあるが、機能的な役割は持っていない。

従って必ずしも、rootから並べる必要は無いのである。

ジョージ・ラッセルのリディアン・クロマティック・コンセプトでは、Am7とD7上には共にC Lydianを使うことになっている。

従ってト長調の m7 7上では、共通してC Lydianを使うと考えることができ、非常

に合理的な理論となっている。



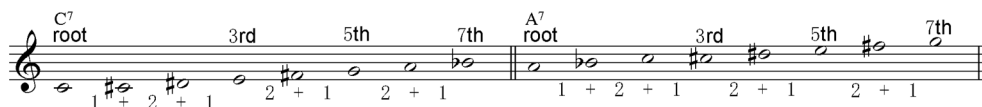
このことは、コード上のスケール (available note scale) を、集合として扱うことが可能なことを意味している。

コード上のスケール (available note scale) を集合と考え、スケールの構成音は要素である。

要素が全く同じ場合は、同じ集合であるので、ダイアトニック・コード上のスケールは、全て同じ集合となる。

また、コードの構成音からスケールを導き出すと、異なるコードから同じ要素のスケールが出来ることがある。

以下のスケールは要素が同じであるので、同じ集合となる。



異なる要素がある場合は、交わりを考えることによって、スケール間の変化の度合いを測ることが出来る。

例えば、D Mixolydian と G Mixolydian の交わりと、B Mixolydian と G Mixolydian の交わりを比較すると、後の方が交わりが少なく、変化が多いことが確認できる。

D Mixolydian = { D, E, F#, G, A, B, C }

G Mixolydian = { G, A, B, C, D, E, F }

B Mixolydian = { B, C#, D#, E, F#, G#, A }

D Mixolydian G Mixolydin = { D, E, G, A, B, C }

B Mixolydian G Mixolydin = { B, E, A }

コード進行において、前後の available note scale の交わりを考えることによって、音楽表現の変化を判断する基準となると、過去の制作上の経験から以下のように予測をした。

要素が同じで同一の集合か、どちらかが部分集合であれば、表現に変化が少なく音楽的には停滞である。

交わりが多く要素の不一致が少なければ、表現の変化も緩やかである。

交わりが少なく要素の不一致が多くなるほど、表現の変化も急激となる。

この予測の正否を、実際の使用結果から述べる。
使っているスケールは、以下の通りである。



前後のスケールの、集合の交わりを求めると、以下の通りである。
異名同音は、同じ要素と考えることとする。

Scale1	Scale2	Scale2はScale1の部分集合であり、変化は少ない。
Scale2	Scale3 = {C (B), D (C#), E, F}	変化が大きい。
Scale3	Scale4 = {G, A, B(C), C#(D), E, F}	変化は少ない。
Scale4	Scale5 = {F#(G), G#(A), A, B, C#}	やや変化が大きい
Scale5	Scale6 = {C#, D, E, F#, G#, A, B}	変化は少ない。

Scale2からScale3の変化が一番大きく、もっとも急激な変化である。

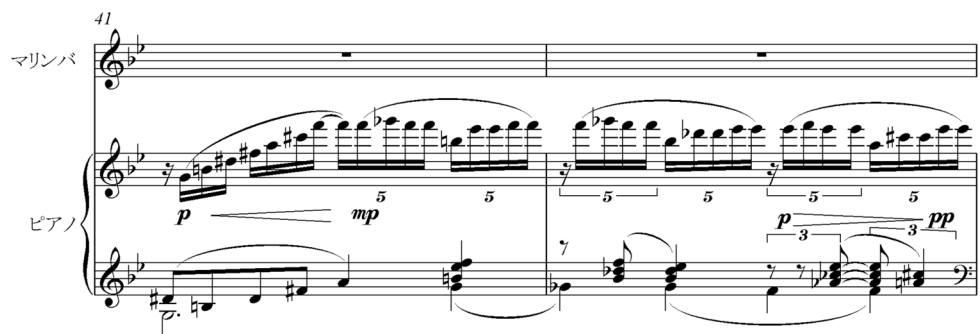
Scale4からScale5の変化もやや大きい、Scale2からScale3の変化に比べると少ない。

系からシャープ系に変わるため、楽譜上では42小節から43小節の変化が大きいのを感じるが、実際には42小節から43小節が、スケール上が一番大きな変化があることがわかる。

このことは、私の経験上の判断と一致した。

従って、この思考が音楽表現の変化を測る、基準となることが証明された。

竹内誠 “月夜に”⁴⁾



作曲をする上で最も重要で困難なことは、表現のコントロールを行うことである。

思い通りに音を操り表現のコントロールを行うには、経験を積むことにより訓練するしか方法はないのであるが、コード上のスケール (available note scale) を集合として扱い、前後を比較する作業は、表現コントロールの判断に一つの指標となるであろう。

7. 結論 (利点と欠点)

以上のように、コードの構成音からスケールを数理的に導き出すことによって、既成のスケールの他に、様々なスケールを生み出すことが出来た。

また、コード進行上の前後の available note scale を数学的に比較することによって、音楽の表現をコントロールすることも可能である。

最後に結論として、この理論の利点と欠点を述べる。

7.1. 利点

柔軟な対応が可能である。

コード理論では、available note scale はモードを優先して教える。

例えば、Dm7 5 上には、D Locrian を使うこととなる。

これは、変ホ長調の とハ短調の の場合は、問題はないのであるが、ハ長調において借用で使われる場合に、前後のハーモニーによっては困った問題が起こる。

例えば、以下のような場合である。

このコード進行では、前後のスケールにEが使われるため、D Locrian のE に違和感を生じる場合がある。

コードの構成音からスケールを導き出せば、Dm7 5 上のスケールは、EとE のどちらかを選択可能であり、柔軟な対応が可能で実用的といえる。

応用の幅が広い

既成のスケールはもちろんのこと、既成の枠に填らないスケールも作り出すことが出来る。

また、ポリコードからスケールを導き出すことによって、より複雑な音組織も容易に実現が可能である。

教育的効果が高い

学習の初歩段階では、スケールを覚えなくてはならないという強迫観念が、学習の妨げになるケースが多い。

しかし、コードの構成音からスケールを思考させることにより、様々なスケールを試させることが出来る。

また、コードとスケールの関係を、論理的に理解するのも容易である。

さらに、コード進行の中でスケールがどの様に変まっているのかを、数学的に整理して考えることにより、破綻のない音楽を短時間で作る事が可能となる。

7.2. 欠点

常にコードの響きに縛られる

コードの構成音からスケールを導き出すため、常にハーモニーの響きの呪縛があることが、この思考の最大の欠点である。

使いこなすには伝統的な音楽理論が必要

コードの構成音からスケールを導き出すと言っても、実際の使用にはテンションの知識は必要である。

また、長調・短調とモードなどの、コード進行の知識も必要である。

従って、教育的効果が高いと言っても、最低限の伝統的な音楽理論を理解した学習者が対象となる。

8. 結び

今後の課題としては、今回の理論をテキスト化することによって、教育に役立てることである。

また、コンピューターの自動作曲に応用が可能と考えられるので、この分野での研究も進めていきたい。

音楽理論を数理的に整理することによって、理論上の矛盾を精査して学習効率を上げ、新たな表現の可能性が開けることが改めて確認できた。

今後も音楽理論を数理的に考える方法を模索し、作品に反映させたい。

参考文献

ジョージ・ラッセル著 リディアン・クロマティック・コンセプト ATN

引用楽譜

- (1) モーリス・ラベル作曲 弦楽四重奏から第1楽章 24～25小節
- (2) 竹内 誠作曲 ピアノ連弾曲集より“深夜の憂鬱” 19小節～21小節
- (3) 竹内 誠作曲 “月夜に” から第1楽章 19小節～20小節
- (4) 竹内 誠作曲 “月夜に” から第1楽章 41小節～44小節