

2変数生存関数のパス従属推定 についての研究

定村 薫

A Study about Path-Dependent Estimation of a Bivariate Survival Function

SADAMURA, Kaoru

Abstract

This paper focuses on the estimation problem of a survival function on two-dimensional data when the data points are subject to censoring. In particular, a path-dependent estimator is studied. In the methods, observations are projected onto the path drawn on two-dimensional space, and replaced by one dimensional data, then a nonparametric estimator is given. When the censoring mechanism is totally ordered, a path-dependent estimator give valid inference. This paper discusses the applicability of the estimator when censoring mechanism is not totally ordered and proposes a new path-dependent estimator. It is slightly different from former one.

要約

本稿はセンサーと呼ばれる中途打ち切りデータが存在するケースにおける2次元データ上の生存関数の推定問題について考える。特にパス従属推定量について研究する。それは2次元空間上に引かれた経路に観測値を射影した後1次元データに置き換えて、ノンパラメトリックな推定量を求める手法である。センサーメカニズムが全順序であるとき、パス従属推定量は有効な推定を行えることがすでにわかっているが、ここでは全順序でないときの適用可能性や、パスの選び方について考察する。さらに従来のパス従属推定量とは若干異なる新しい推定量を提案する。

キーワード

生存関数 (survival function)

2次元空間 (two-dimensional space)

ノンパラメトリック推定 (nonparametric estimation)

センサー (censor)

パス (path)

はじめに

生存分析は故障時刻、死亡時刻あるいは何らかの事象の発生時刻の生存関数、累積ハザード関数、分布関数等を推定する分野であり、医学、地質学、森林統計等の様々な分野に応用されている。1次元空間上の生存分析についてはNelson-Aalen推定量などのノンパラメトリック推定法が確立しているが、本稿ではその2次元への拡張をとりあげる。

2次元データは時間変数が2種類ある場合、例えば医学データにおいては妊娠年齢と結核の発症年齢のようなケースに生じるが、時間変数以外にも例えば森林統計などの空間データにも適用される。例えば航空写真によって森林の発展を分析する際、その発生率の推定が重要になるが、航空写真において雲の存在等の外的要因によって限られた範囲でしか計測が可能でない場合がある。これは中途打ち切り（以下‘センサー’と記述する）データに対応する。

本稿ではIvanoff & Merzbach (2004)による一般化されたセンサーパターン、すなわちcloudおよびanti-cloudモデルを想定し、故障時刻の生存関数の推定問題を考える。

3章ではこの問題について、2次元データを1次元に写像する推定法、特にAguirre (2008)、Ivanoff, Merzbach & Plante (2007)等が提案したパス従属推定量 (path-dependent estimator) の概略について具体例を交えて説明する。

4章ではそれらを検証し、それがどのようなセンサーメカニズムのときに有効であるかを調べる。また、それぞれの場合どのようなパスを選択することが適当であるかを考える。さらに、新しい推定量を提案し、簡単な例によってAguirre (2008)の推定量との違いを考察する。

1. この分野のこれまでの研究

2次元空間上の生存分析において、Ivanoff & Merzbach (2000)の集合添字付きマルチンゲール理論は、この分野の重要な基礎を作った。それはIvanoff & Merzbach (2002)で故障時間変数 Y に2次元の集合 A を添字付け Y_A と表記することで、生存分析に応用された。

生存分析でしばしば問題になるのは、観測が途中で打ち切られ、それ以後のデータが観測されない事であるが、これをセンサーと呼ぶ。センサーされたデータに基づく故障時刻の分析は1次元故障時刻においては複雑ではないが、2次元データにおいてはその形状が多様化する。Ivanoff & Merzbach (2004)はセンサーをcloudおよびanti-cloudと呼ばれる概念で一般化した。

センサーが存在する2次元データにおいて、Tsai & Crowley (1998)は生存関数の推定にパス従属推定量を提案した。一方、Ivanoff, Merzbach & Plante (2007)は2次元点過程を線過程としてとらえ、フロー(flow)を用いた推定を行っている。

Aguirre (2008) は一般化された anti-cloud データに対して2種類の推定量を提案しているが、特に動的な推定が行えるものとしてパス従属推定量を取り上げ、連結最適パスと呼ばれるパスが存在するとき、一致性等の優れた性質を持つことを示した。

2. 定義

2.1 モデルの定義

(1) 過去と未来 (A_t, E_t)

全空間を T とする。また T のコンパクト部分集合のクラスを \mathcal{A} とし (Aguirre (2008) の Definition 2.1.1 を満たすものとする)、インデックス集合と呼ぶ。 \mathcal{A} は通常原点を含む集合からなる。 T の1点 t について、その過去 A_t 、未来、 E_t をそれぞれ図2.1.1に示す範囲とする。また、 $D_t := (E_t)^\circ$ とする。

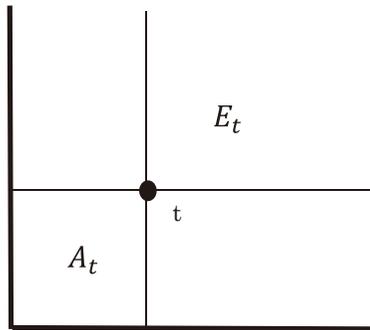


図2.1.1 点 t の過去と未来

$Y : \Omega \rightarrow T$ を故障時刻とし、 $\mu(B) = P\{Y \in B\}$ とする。また、分布関数を $F(t) = \mu(A_t)$ 、生存関数を $S(t) = \mu(E_t)$ とする。

(2) フィルトレーション

時刻 t 以前に得られる情報として、次の2つのフィルトレーションを定義する。

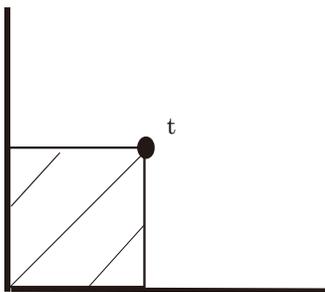


図2.1.2(a) \mathcal{F}_t

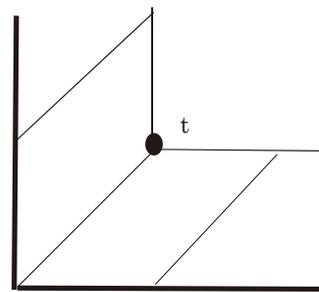


図2.1.2(b) \mathcal{F}_t^*

$$\mathcal{F}_t := \mathcal{F}_{A_t}$$

$$\mathcal{F}_t^* := \mathcal{F}_{D_t}$$

すなわち、図2.1.2(a) (b)にそれぞれ斜線で示した部分の情報である。

2.2 cloudの定義

Ivanoff & Merzbach (2004) に従って cloud の定義を説明する。これは通常のセンサーをより一般化した概念である。

$D = \overline{D^\circ}$ となる閉集合 D をドメインと呼ぶ。ドメインとは図のような離散点や線を含まない閉集合である。

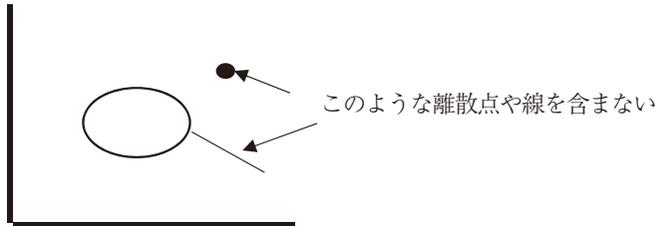


図2.2.1 ドメインの定義

次に2つの集合クラス \mathcal{K} 、 \mathcal{L} を定義する。

\mathcal{K} : 境界が測度0のドメインのクラス

\mathcal{L} : K 内の集合の補集合からなる開集合のクラス

また、適合ランダム集合を、

$$\eta : \Omega \rightarrow \mathcal{A}, \forall t \in T, \{\omega : t \in \eta(\omega)\} \in \mathcal{F}_t$$

*-適合ランダム集合を、

$$\eta : \Omega \rightarrow \mathcal{A}, \forall t \in T, \{\omega : t \in \eta(\omega)\} \in \mathcal{F}_t^*$$

で定義する。

定義 cloud と anti-cloud (Ivanoff & Merzbach (2004))

\mathcal{L} 内に値をとる適合ランダム集合を cloud と呼ぶ。

\mathcal{K} 内に値をとる適合ランダム集合を anti-cloud と呼ぶ。

cloud はセンサーされる領域に、anti-cloud はセンサーされない領域にそれぞれ対応する。

定義*-cloud と*-anti-cloud (Ivanoff & Merzbach (2004))

\mathcal{L} 内に値をとる*-適合ランダム集合を*-cloud と呼ぶ。

\mathcal{K} 内に値をとる*-適合ランダム集合を*-anti-cloud と呼ぶ。

3. 推定量

3.1 2次元累積ハザード推定量と問題点

従来の2次元生存分析は、累積ハザード関数の Nelson-Aalen 推定量

$$\hat{H}_A^{(n)} = \int_A \frac{N^{(n)\xi}}{Z_n(t)} = \sum_{\{i: Y_i \in A \cap \xi_i\}} \frac{1}{Z_n(Y_i)}$$

(ここで Y_i は観測値、 ξ_i は anti-cloud、 $Z_n(t) = I\{Y_i \in E_i\}I\{t \in \xi_i\}$ 、 I は表示関数) を基本として $S(t)$ を推定するものであるが、これを得るためには Z_n (つまり $I\{Y_i \in E_i\}I\{t \in \xi_i\}$) を求めなければならない。ところがこれはセンサーメカニズムによっては必ずしもデータから得られない。このため anti-cloud ξ_i ではなく *-anti-cloud ξ_i^* を使用せざるを得ないケースが生じるが、 $\xi_i^* \subseteq \xi_i$ であるため、観測値のいくつかを捨てることになり、情報量の大きな損失を招く。

3.2 逆確率推定量

情報量の損失を少なくするために、Aguirre (2008) は生存関数 $S(t)$ ではなく $1 - F(t)$ の推定を考え、逆関数推定量と呼ばれる推定量を提示している。

anti-cloud が増加列 (ξ_1, ξ_2, \dots) であるようなケースについて、厳密増加写像 $f: [0,1] \rightarrow S$ (S は平面上の原点を含む増加集合列) を考える。この1次元から2次元への写像は flow と呼ばれる。(flow については Ivanoff & Merzbach (2000) の5章ならびに Ivanoff, Merzbach & Plante (2007) を参照されたい) 次に写像 $\bar{f}: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ を $\bar{f}(t) := \inf\{u : t \in f(u)\}$ で定義し、 $\xi_i^f = f^{-1}(\xi_i)$ とおいたとき、

$$\hat{\mu}_{\bar{f}}^{(n)}(A) = \frac{1}{n} \sum_{\{i: Y_i \in A \cap \xi_i\}} \left(\hat{S}_{\xi_i^f}^{(n)}(\bar{f}(Y_i)) \right)^{-1}$$

によって計算される。ここで、

$$\hat{S}_{\xi_i^f}^{(n)}(p) = \prod_{i: \xi_i^f \wedge \bar{f}(Y_i) \leq p} \left(1 - \frac{I\{\xi_j^f \leq \bar{f}(Y_i)\}}{\sum_{j=1}^n I\{\xi_j^f \wedge \bar{f}(Y_i) \geq \xi_i^f\}} \right)$$

とする。

逆確率推定量の問題点は動的でないという点、すなわち $F(t)$ の推定に A 外の情報を必要とする点にある。また、anti-cloud が増加列のときにしか用いることができない。

3.3 パス従属推定量

Tsai & Crowley (1998) は1変数センサーすなわち $C = (C_1, C_2)$ において $C_1 = C_2$ であるようなケースについて生存関数 $S(t)$ のパス従属推定量を提案している。これは $t = (t_1, t_2)$ における生存関数すなわち $S(t)$ の推定において、図3.3.1に示すような各観測点を直線 $(0,0) - (t_2, t_2)$ および $(t_2, t_2) - (t_1, t_2)$ 型のパスへ射影することによって、1次元生存関数として推定するという方法である。

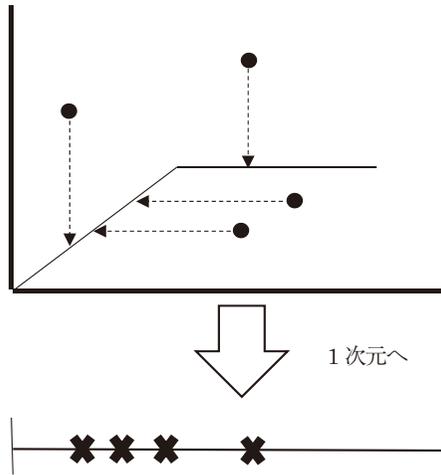


図3.3.1 Tsai & Crowley (1998) の推定法

Aguirre (2008) はTsai & Crowley (1998) の考え方を一般のセンサーパターンのデータに適用することを考えた。また、 $S(t)$ のみでなく $F(t)$ についての推定にもこの考えを適用した。すなわち前述のcloudに対応する $F(t)$ の動的な推定量として、パス従属推定量を適用することを提案している。その概略をここに示す。

簡単のため、考える空間を $T=[0,1]^2$ とする。 $[0,1]$ から T への連続単調増加写像を T 上のパス α として定義する。(注：実際に推定量を求める手順としては逆向きに α^{-1} を用いる)

このパス α を用いて次の2種類の射影を定義する。

$$Y^\alpha := \inf_{t \in \alpha} \{Y \leq t\} \quad (3.1)$$

$$\tilde{Y}^\alpha := \sup_{t \in \alpha} \{t \leq Y\} \quad (3.2)$$

Y^α を図3.3.2に示す。図の●は観測値、矩形はセンサー (anti-cloud) 領域、二重線矢印はパス α を表すものとする。また \tilde{Y}^α はTsai & Crowley (1998) と同様の射影である。

$F(t)$ の推定には(3.1)が、 $S(t)$ の推定には(3.2)が用いられる。これらの射影点の1次元への写像点を $\tau_i^\alpha := \alpha^{-1}(Y_i^\alpha)$ for $i=1, \dots, n$ とする。

anti-cloud ξ の写像は

$$\xi_i^\alpha := \{\alpha(u) \in [0,1] : \alpha(u) \in \xi_i\}$$

すなわち、パスがセンサー領域を抜けるまでの時間として定義する。

$F(At)$ の推定には At 内の Y_i のみが使用される。その意味で動的である。 $\alpha(u)=t$ とすると、 $1 - F(\alpha(u))$ の推定量は、射影された1次元データによって計算され、

$$\prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{I_{\{\tau_i^\alpha \leq u, \tau_i^\alpha \in \xi_i^\alpha\}}}{Z_n^Y(\tau_i^\alpha)} \right) \quad (3.3)$$

となる。ここで、

$$Z_n^Y(u) = \sum_{i=1}^n I_{\{\tau_i^\alpha \geq u, u \in \xi_i^\alpha\}}$$

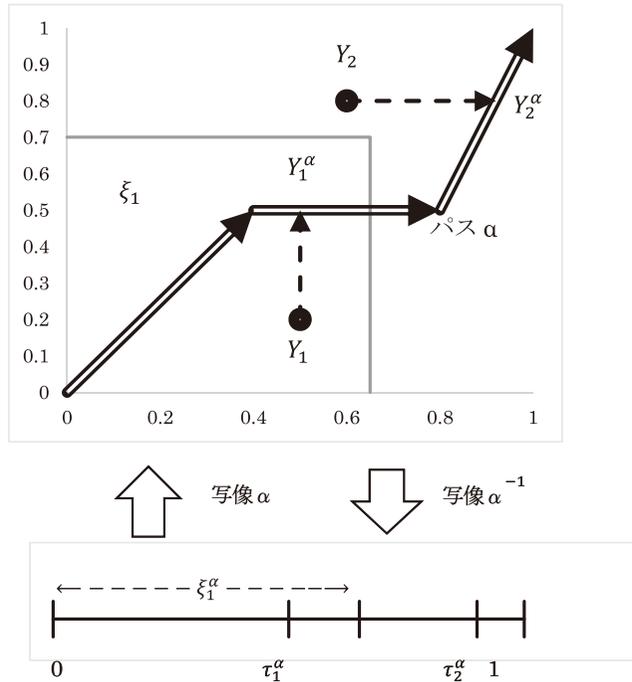


図3.3.2 Y_i のパス α への射影

は時刻 u において Y がまだ発生していない、かつ u において Y がセンサーされていないデータ集合の個数を表す。この集合を at risk 集合と呼ぶ。ノンパラメトリック推定では重要な概念である。

$1 - F(\alpha(u)) = 1 - F(t)$ であることから、これは T 内の任意の点 t について t を通るパスを定義すれば、 $1 - F(t)$ の推定量が得られることを意味する。具体的な計算方法は次節の例で説明する。

また、 $S(t)$ の推定は上の推定量の Y_1^α を \tilde{Y}_1^α に置き換えることによって行われる。

3.4 最適パス

この推定法の問題点のひとつはパスの選択にある。Aguirre (2008) はこの問題に関連して最適パスを定義した。

定義 最適パス Aguirre (2008)

原点 0 と点 $t \in T$ を結ぶパス α は $A_{\alpha(u)} = A_t \cap \xi$ となる点 u が存在するとき、またそのときにのみ ξ について最適であるという。また、すべての ξ_i $i = 1, \dots, n$ に対して最適であることを連結最適という。

1次元センサーすなわち $\xi_i = (C_i, C_i)$ の場合の最適パスの例を図3.4.1に示す。このケースではセンサーされない(すなわち anti-cloud) 領域は原点を含む正方形になる。例えば原点と $t_1 = (t_{11}, t_{12})$ を結ぶパスは α_1 のようになる。すなわち $(0,0) - (t_{11}, t_{11})$ は対角線上を進んだ後、 $(t_{11}, t_{11}) - (t_{11}, t_{12})$ を上に進む。 t_2 へのパスは右に進み α_2 のようになる。

ここで、この例について、推定量の求め方を説明する。

まず $F(t_1)$ の計算法を説明する。各データ点をパス α_1 へ図3.4.1の点線のように射影し、これを図3.4.1の下部に示したように1次元に変換する。anti-cloudについてはその領域内を通る区域を射影する。図3.4.1で Y_i の写像を τ_i で、anti-cloud領域の終点の写像を η_i で表す。Fの推定量の値は各 τ_i^α でジャンプする。例えば τ_1^α におけるジャンプは、この点でat riskな（まだ Y_i もセンサーも観測されていない）個体数が4なので $1/4$ となる。次の τ_2^α におけるat risk集合の個数は2なので、この点における $F(t)$ の値は(3.3)式より、

$$1 - \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$$

となる。その後 t_1 まで新たな Y が観測されないので、 $F(t_1) = 5/8$ となる。

同様に $F(t_2)$ はパス α_2 の1次元写像によって計算される。このようにしてT上の各点における $F(t)$ をそれぞれの点に対応したパスに基づいて計算していく。各 t に対してその点を通るこのタイプのパスはそれぞれ1つしかない。

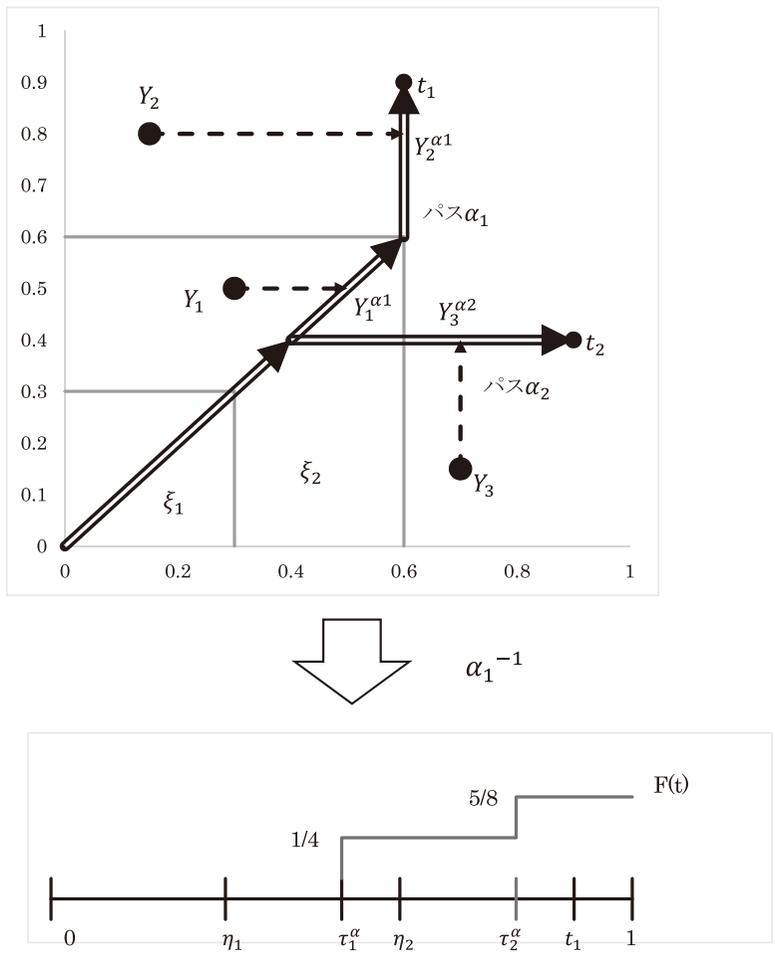


図3.4.1 最適パス α_1 による $F(t)$ の推定量の計算例

4. パス従属推定量の検証

この章ではパス従属推定量について、その適用可能性等について検証する。

4.1 パス従属推定量の欠点

このパス従属推定量の欠点は、パスを任意にとった場合、推定量が測度にならないケースが起こりうるという点にある。例えば、図4.1.1に示す放射状のパスを考えると、観測値とセンサーの α への射影点の順番がパス α_1 とパス α_2 で逆転する場合がある。このため、図4.1.1のように不連続線が生じる。

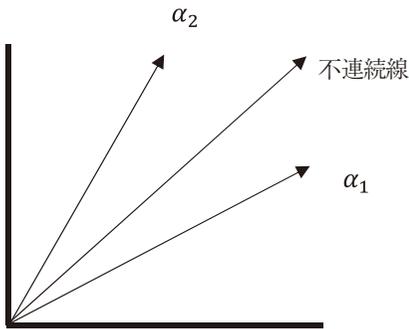


図4.1.1

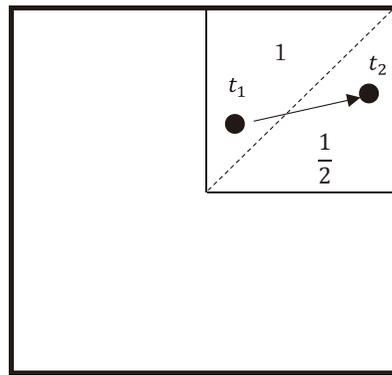


図4.1.2

図4.1.2の数字1, 1/2は該当する範囲内の任意の点 t における $F(A_t)$ の値を表すものとする。図4.1.2の場合、点線より上が1、下が1/2となるようなケースが起こりうる。このような状況において、 t_1 から t_2 へ矢印方向に時間が進むと分布関数の値が1から1/2に減少する。つまり $A_{t_1} \subset A_{t_2}$ にもかかわらず、 $F(A_{t_1}) > F(A_{t_2})$ となる。これは測度の定義に反する。これを回避するためには、不連続線が第1軸に対して垂直または水平方向にしか生じないようにパスを選ぶ必要がある。

4.2 最適パスの存在

3.4に示した連結最適パスは前節の問題点が生じないパスであるが、この連結最適パスはどのようなときに存在するかを考えてみる。最適パスの定義より、パスは $A_{\alpha(u)} = A_t \cap \xi$ となる点 $\alpha(u)$ を通らなければならない。図4.2.1のような2つの ξ_i が比較できない集合である（つまり $\xi_1 \subseteq \xi_2$ でも $\xi_1 \supseteq \xi_2$ でもない）とき、図において \times で示した2つの点をどちらも通らなければならないが、パスの単調非減少性により、そのようなパスは存在しない。

すなわち、 $\{\xi_i, i=1, \dots, n\}$ が増加列でないと連結最適パスは存在しない。つまり、最適パスを用いたパス従属推定量はanti-cloudが順序集合であるような特殊ケースにしか適用できないことがわかる。

順序集合の最もわかりやすい例として1変数センサー、つまり $\xi_i = (C_i, C_i)$ 型のanti-cloud列を考える。最適パスの条件「 $A_{\alpha(u)} = A_t \cap \xi$ となる点 $\alpha(u)$ を通る」より、 $\xi \not\subset A_t$ であるようなすべての ξ

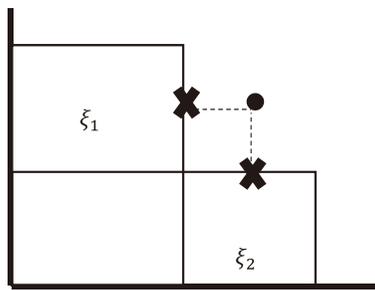


図4.2.1

について連結最適パスは ξ の境界と直角に交わらなければならないが、1次元センサーのケースでは図3.4.1に示したタイプのパスを用いればこれが成立するため連結最適パスとなる。

4.3 anti-cloudが順序集合でないケースのパス選択

それでは、図4.2.1のようなanti-cloud（矩形で表した領域）が順序集合でないケースについてどのようなパスを考えれば良いだろうか。

3.2に示したように、不連続線が斜め向きになるとマイナスの質量が生じる。このため、推定量が測度であるためには不連続線が横軸に垂直かあるいは平行になるようにパスをとらなければならない。したがって、anti-cloudが増加列でない場合も、途中までは同一のパス、分岐してからは横軸に垂直かあるいは平行なパスをとらなければならない。

途中までのパスをどうとるかについては、データ全体を見てから決めるのでは、動的推定にならないので、どのようなデータであっても適用できる推定ということを考えると、対角線にとるのが自然であろう。結局anti-cloudが1次元センサーであるときと同一のパスを選ばざるをえない。

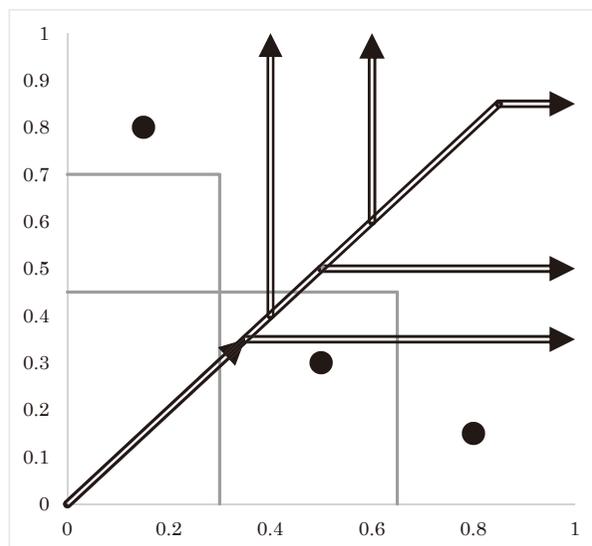


図4.3.1 対角線を基本にしたパス

例として図4.3.1のデータを考える。ここで丸印は観測された故障時刻、矩形はセンサーされた個体の anti-cloud 区域とする。この場合、パスは二重矢印で示した形になる。これは図3.4.1と同じであるが、このデータについては最適パスではない。

図4.3.1のパスを基にした $F(t)$ の推定量 $\hat{F}(t)$ の値を図4.3.2に示す。(Aguirre (2008) の Figure 6.15の作図法を図4.3.1のデータに適用した) ここで ξ_1, ξ_2 は原点を含む矩形の anti-cloud とする。この図の見方を説明すると、例えば $2/3$ と書かれている点線の範囲内では、そのすべての点 t において $\hat{F}(A_i) = 2/3$ となるという意味である。(数字の入っていない左下の範囲は $\hat{F}(A_i) = 0$) Y の観測点以外のプラス質量を持つ点を中抜の \ominus で表しているが、 \times で示した点で

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{5}{8} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{24}$$

の計算によりマイナス質量を生じてしまう。

この理由は、図4.3.2で Y_2 が ξ_2 の範囲内にあるにもかかわらず、パス2の経路では Y_2 が射影される前に ξ_2 から抜けてしまう逆転現象が起きているためである。

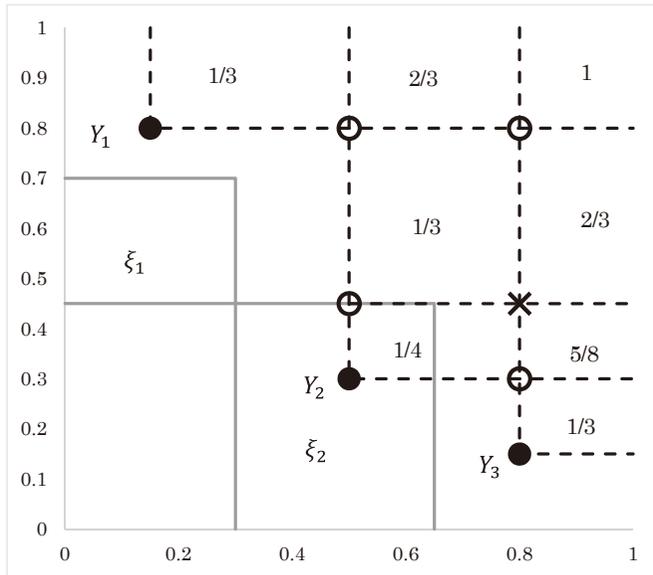


図4.3.2 Aguirre (2008) 推定量による $\hat{F}(t)$ の計算値

4.4 新しい推定量の提案

前節に示したように、このようなデータの場合、Aguirre (2008) の推定量は anti-cloud 領域内にある Y を anti-cloud 圏外に射影してしまう可能性があるという欠点があることがわかった。そこで別の推定量を考える。

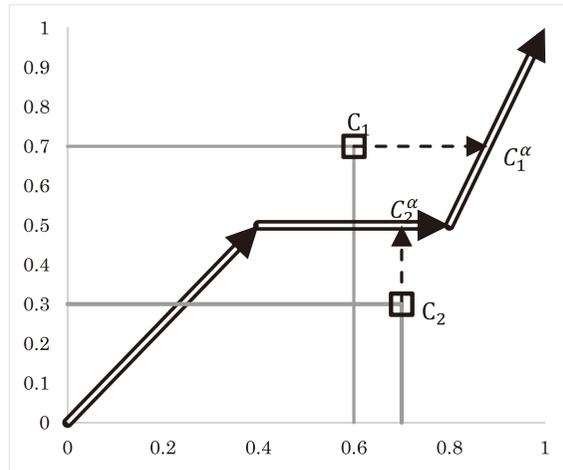


図4.4.1 anti-cloud の射影

anti-cloudが完全に観測されるのは、その頂点を C_i とすると、 $t \geq C_i$ となったときなので、anti-cloudを区域として扱うのではなく、その頂点（図4.4.1の四角で描かれた点） C_1, C_2 で観測されたものとして Y と同じように C_1^α, C_2^α に射影するという方法である。1次元センサーの場合には2つの推定量は一致する。また、 \tilde{Y}_i^α を用いた $S(t)$ の推定の場合も両推定量は同一である。この推定量では、at risk 集合のデータ数は、

$$\sum I\{\tau_i^\alpha \geq u, \eta_i \geq u\}$$

によって計算する。（ $\eta_i = \alpha^{-1}(C_i^\alpha)$ ）

ここで

$$\{u \in \xi_i^\alpha\} = \{\alpha(u) \leq C_i^\alpha\}$$

が $\mathcal{F}_{\alpha(u)}$ に含まれるかどうかという点については、 ξ_i が矩形である事がわかっているならば、この事象は $\alpha(u)$ 以前の情報から得られるので、 ξ_i^α は \mathcal{F}_u^α -anti-cloud である。

図4.4.2に図中の各 $t \in T$ について分布関数 $F(A_t)$ の本稿で提案した推定量の値を示す。四角で表した点は anti-cloud 領域の頂点を表す。

Aguirre (2008) の推定量（図4.3.3）はセンサーが anti-cloud の頂点に来る前に発生したとみなしてしまうために、例えば Y_1 については2つのデータがセンサーされた後で起こったとみなされてしまう。その結果 Y_1 の質量を $1/3$ と過大推定されてしまう。本稿で提案された推定量では Y_1 の質量は $1/5$ と推定される。また、本稿の推定量では、この例においては負の質量は生じない。

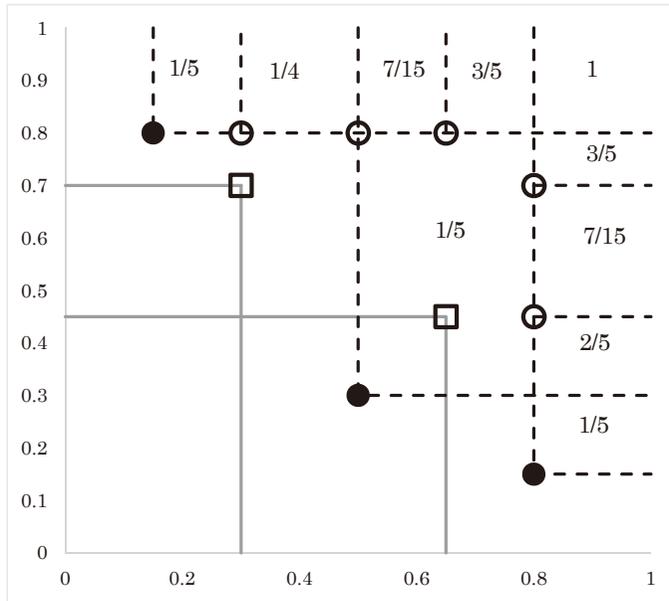


図4.4.2 新しい推定量による $\hat{F}(t)$ の計算値

この推定量は anti-cloud が矩形でなくても適用できる場合がある。例として anti-cloud が四分の一楕円のケースを示す。(図4.4.3)

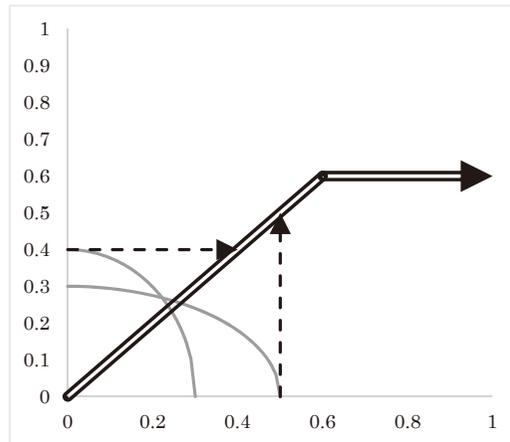


図4.4.3 楕円型 anti-cloud

このケースでは、点線で示すような射影を考えると、この推定量が適用できる。

しかし、この推定量もまた負の質量が生じるケースがある。例として図4.4.2とは異なるデータおよびそのデータについて得られた $F(t)$ の推定量の値を図4.4.4に示す。Xで表した点がマイナス質量点である。

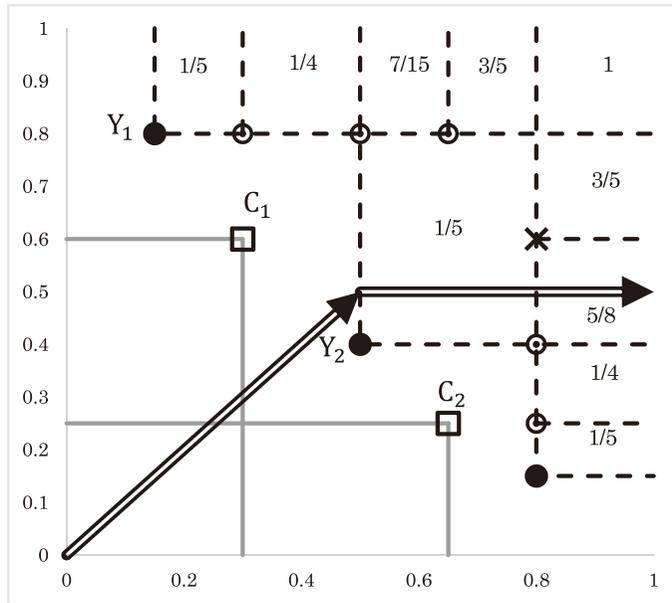


図4.4.4 負の質量が生じるケース

Aguirre (2008) の推定量とは逆に、2重矢印で表したパスが C_2 を頂点とする anti-cloud の領域外にある観測点 Y_2 を C_2 より先に射影してしまうからである。

このように、どちらの推定量にも欠点があり。その選択は難しい。

5. むすび

Aguirre (2008) では連結最適パスが存在する場合、一致性等の良い性質を持つ推定量が得られることが示されている。しかし、すべての anti-cloud に対して共通の最適パスが存在するケースはかなり限られることがわかった。例えば順序を比較できない anti-cloud が共存するようなケースにおいては、連結最適パスが存在しないが、そのような場合、パス従属推定量には負の質量が生じる等の問題点がある。この点について本稿では具体例を用いて示すことができた。

そのようなケースについて、本稿ではセンサー発生時刻をひとつの点とみなす新たな推定量を提案した。この推定量は Aguirre (2008) の推定量におけるセンサーをパス上の早すぎる時刻に射影してしまうという欠点を修正している。この推定量は矩形センサーの他、四分の一楕円型のセンサーにも適用できる。しかし、この推定量もセンサーメカニズムによっては負の質量を持つ点が生じる。

anti-cloud が順序集合でない場合、どのようなデータに対しても良い性質を持つパス従属推定量を見つけることは困難であるといえる。そのようなケースでは、別の種類の推定量も含め、より性質の良い推定量を探していく必要がある。実際のデータに適用する際、動的推定であることがどこまで必要であるかによって推定量のタイプも変わってくる。Aguirre (2008) の推定量は動的であることを強調したものだが、動的であるという条件を若干緩和すれば、様々な推定量が考えられる。それについては今後の研究課題としたい。

参考文献

- [1] Aguirre, A.C. 'Set-Indexed Survival Analysis with Generalized Censoring', Doctoral thesis, University of Ottawa, 2008.
- [2] Burke, Murray D., 'Estimation of a Bivariate Distribution Function Under Random Censorship', *Biometrika* Vol. 75, No.2, Jun. 1988, 379-382.
- [3] Ivanoff, B. G. and Merzbach, E., *Set-Indexed Martingales*, Chapman and Hall/CRC Press, Boca Raton, 2000.
- [4] Ivanoff, B. G. and Merzbach, E., 'Random censoring in set-indexed survival analysis', *The Annals of Applied Probability* 12, 2002, 944-971.
- [5] Ivanoff, B. G. and Merzbach, E., 'Random clouds and an application to censoring in survival analysis', *Stochastic Processes and their Applications* 111, 2004, 259-279.
- [6] Ivanoff, B. G., Merzbach, E. and Plante M., 'A Compensator Characterization of Point Processes on Topological Lattices', *Electronic J. Probab.* 12, 47-74 (2007) .
- [7] Tsai, W-Y and Crowley, J., 'A Note on Nonparametric Estimators of the Bivariate Survival Function Under Univariate Censoring', *Biometrika* Vol. 85, No.3, Sep.1998, 573-580.